ZUR THEORIE DER LINEAREN INTEGRODIFFERENTIALGLEICHUNGEN

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
BEI DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER
GROSSHERZOGLICH HESSISCHEN LUDWIGS-
UNIVERSITÄT ZU GIESSEN. EINGEREICHT

VON

ARTUR SASSMANNSHAUSEN
GEBOREN IN WORMS

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1916

Genehmigt durch das Prüfungskollegium am 1. Februar

Referent: Dr. Schlesinger

Inhalt.

1*

Einleitung.

nan für ein System von n linearen Differentialgleichungen die Differentialgleichungen aufstellt, denen die Minoren g einer Integralmatrix — d. h. einer Matrix von n von- ıbhängigen Lösungssystemen — genügen, so gelangt man ıem System von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, zt $\binom{n}{p}$ Gleichungen enthält, da es $\binom{n}{p}^2$ Minoren $p$ter Ord- n-reihigen Determinante gibt.

n nun durch Anwendung des Fredholmschen Grenzüber- in System von n linearen Differentialgleichungen die lineare entialgleichung

$$\frac{dy(z\,|\,i,\varkappa)}{dz} = a(z|i,\varkappa) + \int_0^1 y(z|i,\lambda)a(z|\lambda,\varkappa)\,d\lambda,$$

nte Feldgleichung, gewinnen kann[1]), wobei die Integral- n Lösungsfeld dieser Gleichung entspricht, so liegt die welchen Integrodifferentialgleichungen die Fredholmschen ses Lösungsfeldes genügen. Diese Frage soll in der folgen- behandelt werden.

fsmittel werden im ersten Abschnitt Regeln für die Diffe- ner Fredholmschen Determinante und ihrer Minoren nach ıeter abgeleitet, die der Differentiationsregel für eine end- inante genau entsprechen. Dann wird noch eine Beziehung ı Fredholmschen Minoren 2. Ordnung eines komponierten den Minoren seiner Komponenten hergestellt, die ebenfalls über endliche Determinanten entspricht.

Im zweiten Abschnitt werden zunächst mit Hilfe der Erge
des ersten Abschnittes die Differentialgleichung für die Fredho
Determinante und die Integrodifferentialgleichung für die M
1. Ordnung eines Lösungsfeldes der Gleichung (A) bzw. für dess
verses Feld aufgestellt.[1]) Sodann wird das System von Integrodi
tialgleichungen aufgestellt, dem die Minoren 1. und $p$ter Ordnu
erwähnten Lösungsfeldes genügen, und das die Gestalt hat:

$$
\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{d}{dz} U(z \mid i, \varkappa) = b(z \mid i, \varkappa) + \int_0^1 U(z \mid i, \lambda) b(z \mid \lambda, \varkappa)\, d\lambda \\
&\frac{d}{dz} V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdots \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right) = \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} \left| U(z \mid i_\alpha, \varkappa_\beta) \right|_{\substack{\alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots p \\ \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1 \cdots p}} b(z \mid i_r, \varkappa \ldots \\
&\qquad + \int_0^1 \sum_{s=1}^{p} V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdots \\ i_s, \lambda \\ \cdots \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right) b(z \mid \lambda, \varkappa_s)\, d\lambda.
\end{aligned} \right.
$$

Wie man sieht, tritt hier als Analogon zur Erhöhung der Anza
Gleichungen in dem linearen Differentialsystem ein neuer Typu
Integrodifferentialgleichungen auf. Die Form der zweiten Glei
des erhaltenen Systems legt es nahe, es in der Weise zu verall
nern, daß man statt des einen Koeffizienten deren p verschi
$b_1(z \mid i, \varkappa)$ bis $b_p(z \mid i, \varkappa)$ einführt. Man erhält so das System:

$$
\text{(C)} \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{d}{dz} U_l(z \mid i, \varkappa) = b_l(z \mid i, \varkappa) + \int_0^1 U_l(z \mid i, \lambda) b_l(z \mid \lambda, \varkappa)\, d\lambda \quad (l = 1 \ldots \\
&\frac{d}{dz} V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdots \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right) = \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} \left| U_\beta(z \mid i_\alpha, \varkappa_\beta) \right|_{\substack{\alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots p \\ \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1 \cdots p}} b_s(z \mid i_r, \ldots \\
&\qquad + \int_0^1 \sum_{s=1}^{p} V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdots \\ i_s, \lambda \\ \cdots \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right) b_s(z \mid \lambda, \varkappa_s)\, d\lambda.
\end{aligned} \right.
$$

Da die Behandlung dieses Systems recht umständlich wird, s
schränken wir uns auf den Fall $p = 2$. Es wird dann gezeigt, da
allgemeine Lösungssystem dieses Systems folgende Gestalt hat[2])

1) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 96, Formel (F) und S. 112

$$\mathfrak{U}_1(z\,|\,i,\varkappa) = U_1(z\,|\,i,\varkappa) + c_1(i,\varkappa) + \int_0^1 c_1(i,\lambda)\,U_1(z\,|\,\lambda,\varkappa)\,d\lambda$$

$$\mathfrak{U}_2(z\,|\,i,\varkappa) = U_2(z\,|\,i,\varkappa) + c_2(i,\varkappa) + \int_0^1 c_2(i,\lambda)\,U_2(z\,|\,\lambda,\varkappa)\,d\lambda$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right) = {} & V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right) + C\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix} + c_1(i_1,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,i_2,\varkappa_2)\\
& - c_2(i_1,\varkappa_2)\,U_1(z\,|\,i_2,\varkappa_1) - c_1(i_2,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,i_1,\varkappa_2)\\
& + c_2(i_2,\varkappa_2)\,U_1(z\,|\,i_1,\varkappa_1) + \int_0^1 \Big\{ C\begin{pmatrix}i_1,\lambda\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix} U_1(z\,|\,\lambda,\varkappa_1)\\
& + C\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\lambda\end{pmatrix} U_2(z\,|\,\lambda,\varkappa_2) + c_1(i_1,\lambda)\,U_1(z\,|\,\lambda,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,i_2,\varkappa_2)\\
& - c_2(i_1,\lambda)\,U_1(z\,|\,i_2,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,\lambda,\varkappa_2)\\
& - c_1(i_2,\lambda)\,U_1(z\,|\,\lambda,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,i_1,\varkappa_2)\\
& + c_2(i_2,\lambda)\,U_1(z\,|\,i_1,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,\lambda,\varkappa_2)\Big\}\,d\lambda\\
& + \int_0^1\!\!\int_0^1 C\begin{pmatrix}i_1,\lambda\\ i_2,\mu\end{pmatrix} U_1(z\,|\,\lambda,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,\mu,\varkappa_2)\,d\lambda\,d\mu,
\end{aligned}$$

wo $U_1(z\,|\,i,\varkappa)$, $U_2(z\,|\,i,\varkappa)$, $V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right)$ ein partikuläres Lösungssystem bedeutet, und außer dem Nichtverschwinden der Fredholmschen Determinanten von $U_1(z\,|\,i,\varkappa)$ und $U_2(z\,|\,i,\varkappa)$ noch das Nichtverschwinden der Fredholmschen Determinante von $(-U_1(z\,|\,i_1,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,i_2,\varkappa_2))$ vorausgesetzt werden muß. $V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right)$ dagegen braucht keiner Bedingung unterworfen zu werden. $c_1(i,\varkappa)$, $c_2(i,\varkappa)$, $C\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix}$ sollen willkürlich und von z unabhängig sein. Eine andere Form des allgemeinen Lösungssystems ist:

$$\mathfrak{U}_1(z\,|\,i,\varkappa) = U_1(z\,|\,i,\varkappa) + c_1(i,\varkappa) + \int_0^1 c_1(i,\lambda)\,U_1(z\,|\,\lambda,\varkappa)\,d\lambda$$

$$\mathfrak{U}_2(z\,|\,i,\varkappa) = U_2(z\,|\,i,\varkappa) + c_2(i,\varkappa) + \int_0^1 c_2(i,\lambda)\,U_2(z\,|\,\lambda,\varkappa)\,d\lambda$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right) = {} & \begin{vmatrix}\mathfrak{U}_1(z\,|\,i_1,\varkappa_1) & \mathfrak{U}_2(z\,|\,i_1,\varkappa_2)\\ \mathfrak{U}_1(z\,|\,i_2,\varkappa_1) & \mathfrak{U}_2(z\,|\,i_2,\varkappa_2)\end{vmatrix} + \mathfrak{C}\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix}\\
& + \int_0^1 \Big\{ \mathfrak{C}\begin{pmatrix}i_1,\lambda\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix} U_1(z\,|\,\lambda,\varkappa_1) + \mathfrak{C}\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\lambda\end{pmatrix} U_2(z\,|\,\lambda,\varkappa_2)\Big\}\,d\lambda\\
& + \int_0^1\!\!\int_0^1 \mathfrak{C}\begin{pmatrix}i_1,\lambda\\ i_2,\mu\end{pmatrix} U_1(z\,|\,\lambda,\varkappa_1)\,U_2(z\,|\,\mu,\varkappa_2)\,d\lambda\,d\mu,
\end{aligned}$$

wo U_1, U_2; c_1, c_2 dieselbe Bedeutung haben wie vorh
willkürlich und von z unabhängig ist.

Setzt man voraus, daß für $b_1(z \mid i, \varkappa)$ und $b_2(z \mid i,$
lungen gelten:

$$b_1(z \mid i, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(i, \varkappa)(z - z_0)^n$$

$$b_2(z \mid i, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n(i, \varkappa)(z - z_0)^n,$$

die für $|z - z_0| \leqq R$ konvergent sind, so ergibt sic
$z = z_0$ holomorphes Lösungssystem in der Form

$$U_1(z \mid i, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(i, \varkappa)(z - z_0)^n$$

$$U_2(z \mid i, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(i, \varkappa)(z - z_0)^n$$

$$V\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} (z - z_0)$$

das für $|z - z_0| < R$ konvergiert, und für dessen K
lineare Rekursionsformeln erhält[1]), in denen die Anfa
$\Phi_0(i, \varkappa)$, $\chi_0 \begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix}$ ganz willkürlich bleiben. Ist insbe

$$\varphi_0(i, \varkappa) = 0, \ \Phi_0(i, \varkappa) = 0, \ \chi_0 \begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} =$$

so erhalten wir diese Rekursionsformeln in einer einfach
analytische Fortsetzung dieses Lösungssystems und da
Lösungssystems beim Umlauf um einen isolierten
der Koeffizienten werden dann ganz entsprechend b
für die Gleichung (A) in der erwähnten Abhandlung v
durchgeführt ist.[2])

In dem Falle, wo die Koeffizienten von z unabh
sich das allgemeine Lösungssystem gemäß den vorhe
meln durch die beiden Volterraschen Transzendenten

1) Wegen der Formeln für φ_n und Φ_n vgl. Schlesin
Formel (3).

2) S. 101 ff.

$$W(z - z_0 \mid b_1(i, \varkappa)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_1^{(n)}(i, \varkappa)(z - z_0)^n$$

$$W(z - z_0 \mid b_2(i, \varkappa)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_2^{(n)}(i, \varkappa)(z - z_0)^n$$

wo $b_1^{(n)}(i, \varkappa)$ und $b_2^{(n)}(i, \varkappa)$ die sogenannten iterierten
ind.

Fall

$$b_1(z \mid i, \varkappa) = b_2(z \mid i, \varkappa) = b(z \mid i, \varkappa)$$

das System zurück, dem die Minoren 2. Ordnung eines
ldes von (A) genügen.

ı entsprechende Entwicklungen werden für die Gleichung

$$\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right) = \int_0^1 \left\{ Q\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\lambda\\ \varkappa_2\end{matrix}\right) b_1(z \mid \lambda, \varkappa_1) + Q\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\varkappa_1\\ \lambda\end{matrix}\right) b_2(z \mid \lambda, \varkappa_2) \right\} d\lambda$$

hrt, die sich zu der dritten Gleichung des Systems (C) für
hält, wie die Streckengleichung

$$\frac{dx(z \mid \varkappa)}{dz} = \int_0^1 x(z \mid \lambda) a(z \mid \lambda, \varkappa) d\lambda$$

ldgleichung (A).

Auszug aus der folgenden Arbeit ist im Jahresbericht der
. Mathematiker-Vereinigung **25** (1916) erschienen.

---

l. etwa Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, S. 514.

Erster Abschnitt.

Über die Minoren der Fredholmschen Deter

I. Differentiation der Fredholmschen Determinante und nach einem Parameter.

1. Ein in bezug auf die reellen Veränderlichen i Intervall $0 \leqq i, \varkappa \leqq 1$ stetiger Kern $y(i, \varkappa)$ möge noch teren Veränderlichen z abhängen, und zwar werde de wegen vorausgesetzt, daß $y(z \mid i, \varkappa)$ eine monogene Funk plexen Veränderlichen z sei. Man nennt dann[1] $y(z \mid i,$ genes Funktionenfeld der Veränderlichen z, i und $\varkappa$ heiß zeiger. Die Fredholmsche Determinante D_y ist ebenfalls von z, und zwar, wie sich aus ihrer Darstellung[2])

$$(1)\quad D_y(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} y(z \mid i_1, i_1) \ldots y(z \mid i_1, i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y(z \mid i_p, i_1) \ldots y(z \mid i_p, i \end{vmatrix}$$

sofort ergibt, ebenfalls eine monogene Funktion der ko änderlichen z. Wir fragen nach der Ableitung dieser Fu

Um diese Ableitung zu erhalten, dürfen wir die R weise differenzieren, denn die Glieder dieser Reihe besitz leitungen, und die durch gliedweise Differentiation er konvergiert gleichmäßig.

Die gliedweise Differentiation der Reihe (1) ergibt:

$$\frac{d D_y(z)}{dz} = \int_0^1 y'(z \mid i, i)\, di$$

$$+ \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{vmatrix} y'(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2) \\ y'(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y(z|i_1,i_1) & y'(z|i_1,i_2) \\ y(z|i_2,i_1) & y'(z|i_2,i_2) \end{vmatrix} \right\} d$$

$$+ \frac{1}{3!} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{vmatrix} y'(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2) & y(z|i_1,i_3) \\ y'(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2) & y(z|i_2,i_3) \\ y'(z|i_3,i_1) & y(z|i_3,i_2) & y(z|i_3,i_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y(z|i_1,i_1) & y'(\\ y(z|i_2,i_1) & y'(\\ y(z|i_3,i_1) & y'(\end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} y(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2) & y'(z|i_1,i_3) \\ y(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2) & y'(z|i_2,i_3) \\ y(z|i_3,i_1) & y(z|i_3,i_2) & y'(z|i_3,i_3) \end{vmatrix} \right\} di_1\, di_2\, di_3 + \cdots \text{ in inf.,}$$

1) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 87.

2) Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., S. 462.

Striche Ableitungen nach z bedeuten. Die einzelnen Determi-
werden nun nach den Spalten entwickelt, in denen die Ablei-
von y stehen. In den y', die nur von einer Integrationsver-
ɔhen abhängen, wird dieselbe mit i bezeichnet. In allen übrigen
ichnen wir die erste Integrationsveränderliche mit i, die zweite
ınd formen die mit ihnen multiplizierten Subdeterminanten durch
oder Spaltenvertauschungen so um, daß in ihnen links oben
er Stelle das Element $y(z\,|\,\varkappa, i)$ steht. Die übrigen Integrations-
rlichen werden in geeigneter Weise mit i_1, i_2 usw. bezeichnet.
hält so:

$$= \int_0^1 y'(z\,|\,i, i)\,di$$

$$- \frac{1}{2!}\left\{2\int_0^1\int_0^1 y'(z|i,i)\,y(z\,|\,i_1,i_1)\,di\,di_1 - 2\int_0^1\int_0^1 y'(z|i,\varkappa)\,y(z|\varkappa,i)\,di\,d\varkappa\right\}$$

$$- \frac{1}{3!}\left\{3\int_0^1\int_0^1\int_0^1 y'(z|i,\,i)\begin{vmatrix} y(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2) \\ y(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2)\end{vmatrix} di\,di_1\,di_2\right.$$

$$\left. - 6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 y'(z|i,\varkappa)\begin{vmatrix} y(z|\varkappa,i) & y(z|\varkappa,i_1) \\ y(z|i_1,i) & y(z|i_1,i_1)\end{vmatrix}\right\} di\,d\varkappa\,di_1$$

$+ \cdots$ in inf.

ɾerden diejenigen Summanden, die $y'(z\,|\,i, i)$ und die, welche
$\varkappa)$ enthalten, zu je einer besonderen Reihe zusammengefaßt.

r ersten Reihe wird $\int_0^1 y'(z\,|\,i, i)\,di$ herausgezogen, und aus der

$\int_0^1\int_0^1 y'(z\,|\,i, \varkappa)\,di\,d\varkappa$, was wegen der gemachten Voraussetzungen
r erlaubt ist.

$$\frac{d\,D_y(z)}{dz}$$

$$- \frac{1}{1!}\int_0^1 y(z\,|\,i,\,i)\,di + \frac{1}{2!}\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} y(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2) \\ y(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2)\end{vmatrix} di_1\,di_2$$

$$+ \cdots \text{ in inf.}\Big\}\int_0^1 y'(z\,|\,i,\,i)\,di$$

Nach Formel (1) ist die erste Reihe die Determinante $D_y(z)$ selbst. Ferner ist[1]):

$$(2)\qquad -D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa \end{matrix}\right) = y(z\,|\,\varkappa, i) + \frac{1}{1!}\int\limits_0^1 \begin{vmatrix} y(z\,|\,\varkappa, i) & y(z\,|\,\varkappa, i_1) \\ y(z\,|\,i_1, i) & y(z\,|\,i_1, i_1) \end{vmatrix} di_1 + \cdots \text{ in inf.},$$

wo $D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa \end{matrix}\right)$ das Symbol für einen Fredholmschen Minor 1. Ordnung ist. Setzt man also für die Reihen die Werte (1) und (2) ein, so erhält man folgende Differentiationsregel für eine Fredholmsche Determinante:

$$(3)\qquad \frac{dD_y(z)}{dz} = D_y(z)\int\limits_0^1 y'(z\,|\,i, i)\,di + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 y'(z\,|\,i, \varkappa)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa \end{matrix}\right) di\,d\varkappa.$$

Wie man sieht, ist diese Formel der Differentiationsregel für eine Determinante $n$ter Ordnung:

$$\frac{d}{dz}\,|\,y_{i\varkappa}(z)\,|_{i,\varkappa=1,2\cdots n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} y'_{i\varkappa}(z)\,Y_{i\varkappa},$$

in der $Y_{i\varkappa}$ die zu $y_{i\varkappa}$ gehörige Subdeterminante bedeutet, ganz analog.

2. Es soll nun die Differentiationsregel für einen Fredholmschen Minor 1. Ordnung hergeleitet werden.

Wir differenzieren zu diesem Zwecke die Reihe (2) gliedweise, was aus denselben Gründen gestattet ist wie bei der Reihe (1).

Wir erhalten im $p$ten Gliede unter dem $(p-1)$fachen Integral wieder eine Summe von p Determinanten, die jedesmal in einer Spalte Ableitungen von y enthalten. Die einzelnen Determinanten werden nach diesen Spalten entwickelt. Die Bezeichnungen der Integrationsveränderlichen werden zum Teil in geeigneter Weise geändert, und diejenigen mit den y' multiplizierten Subdeterminanten, welche dieselben Elemente enthalten, durch Zeilen- oder Spaltenvertauschungen auf dieselbe Form gebracht. Dann werden jedesmal diejenigen Glieder zusammengefaßt, die einen der Ausdrücke

$$y'(z\,|\,\varkappa, i),\quad \int\limits_0^1 y'(z\,|\,\lambda, i)\,d\lambda,\quad \int\limits_0^1 y'(z\,|\,\varkappa, \lambda)\,d\lambda,$$

$$\int\limits_0^1 y'(z\,|\,\lambda, \lambda)\,d\lambda \quad\text{und}\quad \int\limits_0^1\int\limits_0^1 y'(z\,|\,\lambda, \mu)\,d\lambda\,d\mu$$

enthalten, und diese Ausdrücke selbst ...

$$-\frac{d}{dz}D_y\left(z\,\middle|\,\varkappa\right)$$

$$1+\frac{1}{1!}\int_0^1 y(z|i_1,i_1)\,di_1+\frac{1}{2!}\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} y(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2)\\ y(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2)\end{vmatrix}di_1\,di_2 + \cdots \text{ in inf.}\Big\}$$

$$)\,d\lambda\Big\{y(z|\varkappa,\lambda)+\frac{1}{1!}\int_0^1\begin{vmatrix} y(z|\varkappa,\lambda) & y(z|\varkappa,i_1)\\ y(z|i_1,\lambda) & y(z|i_1,i_1)\end{vmatrix}di_1$$

$$+\frac{1}{2!}\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} y(z|\varkappa,\lambda) & y(z|\varkappa,i_1) & y(z|\varkappa,i_2)\\ y(z|i_1,\lambda) & y(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2)\\ y(z|i_2,\lambda) & y(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2)\end{vmatrix}di_1\,di_2$$

$$+\cdots\text{ in inf.}\Big\}$$

$$)\,d\lambda\Big\{y(z|\lambda,i)+\frac{1}{1!}\int_0^1\begin{vmatrix} y(z|\lambda,i) & y(z|\lambda,i_1)\\ y(z|i_1,i) & y(z|i_1,i_1)\end{vmatrix}di_1$$

$$+\frac{1}{2!}\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} y(z|\lambda,i) & y(z|\lambda,i_1) & y(z|\lambda,i_2)\\ y(z|i_1,i) & y(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2)\\ y(z|i_2,i) & y(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2)\end{vmatrix}di_1\,di_2$$

$$+\cdots\text{ in inf.}\Big\}$$

$$+\frac{1}{1!}\int_0^1\begin{vmatrix} y(z|\varkappa,i) & y(z|\varkappa,i_1)\\ y(z|i_1,i) & y(z|i_1,i_1)\end{vmatrix}di_1$$

$$+\frac{1}{2!}\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} y(z|\varkappa,i) & y(z|\varkappa,i_1) & y(z|\varkappa,i_2)\\ y(z|i_1,i) & y(z|i_1,i_1) & y(z|i_1,i_2)\\ y(z|i_2,i) & y(z|i_2,i_1) & y(z|i_2,i_2)\end{vmatrix}di_1\,di_2$$

$$+\cdots\text{ in inf.}\Big\}\int_0^1 y'(z|\lambda,\lambda)\,d\lambda$$

$$,\mu)\,d\lambda\,d\mu\Big\{\begin{vmatrix} y(z|\varkappa,i) & y(z|\varkappa,\lambda)\\ y(z|\mu,i) & y(z|\mu,\lambda)\end{vmatrix}+\frac{1}{1!}\int_0^1\begin{vmatrix} y(z|\varkappa,i) & y(z|\varkappa,\lambda) & y(z|\varkappa,i_1)\\ y(z|\mu,i) & y(z|\mu,\lambda) & y(z|\mu,i_1)\\ y(z|i_1,i) & y(z|i_1,\lambda) & y(z|i_1,i_1)\end{vmatrix}di_1$$

$$+\cdots\text{ in inf.}\Big\}.$$

Berücksichtigt man hier die Formeln (1) und (2), sowie d

$$(4)\quad D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2\end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} y(z|\varkappa_1, i_1) & y(z|\varkappa_1, i_2) \\ y(z|\varkappa_2, i_1) & y(z|\varkappa_2, i_2)\end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{1!}\int_0^1 \begin{vmatrix} y(z|\varkappa_1,i_1) & y(z|\varkappa_1,i_2) & y(z|\varkappa_1,\lambda_1) \\ y(z|\varkappa_2,i_1) & y(z|\varkappa_2,i_2) & y(z|\varkappa_2,\lambda_1) \\ y(z|\lambda_1,i_1) & y(z|\lambda_1,i_2) & y(z|\lambda_1,\lambda_1)\end{vmatrix} d\lambda_1 + \cdots$$

wo $D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2\end{matrix}\right)$ das Symbol für einen Fredholmschen Minor nung von $y(z|i, \varkappa)$ ist, so erhält man

$$(5)\quad \frac{d}{dz} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right) = - y'(z|\varkappa, i) D_y(z)$$

$$- \int_0^1 \left\{ y'(z|\lambda, i) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \varkappa\end{matrix}\right) + y'(z|\varkappa, \lambda) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \lambda\end{matrix}\right)\right\} d\lambda$$

$$+ D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right) \int_0^1 y'(z|\lambda, \lambda)\, d\lambda + \int_0^1\int_0^1 y'(z|\lambda, \mu) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i, \\ \varkappa,\end{matrix}\right.$$

3. Wir wollen nun nach derselben Methode noch die Al eines Fredholmschen Minors 2. Ordnung berechnen.

Wir verfahren zu diesem Zwecke mit der Reihe (4) ga sprechend wie mit der Reihe (2) in Nr. 2. Wir differenzier die Reihe (2) gliedweise und entwickeln die entstehenden Determ nach den Spalten, in denen die Ableitungen von y stehen. werden, nach geeigneter Änderung der Benennungen der Integ veränderlichen, diejenigen mit y' multiplizierten Subdeterm welche die gleichen Elemente enthalten, durch Zeilen- oder S vertauschungen auf dieselbe Form gebracht. Ferner werden die die einen der Ausdrücke:

$$y'(z|\varkappa_1, i_1),\ y'(z|\varkappa_2, i_1),\ y'(z|\varkappa_1, i_2),\ y'(z|\varkappa_2, i_2);$$

$$\int_0^1 y'(z|\lambda, i_1)\, d\lambda,\ \int_0^1 y'(z|\lambda, i_2)\, d\lambda,\ \int_0^1 y'(z|\varkappa_1, \lambda)\, d\lambda,\ \int_0^1 y'(z|\varkappa_2, \lambda)\, d$$

$$\int_0^1 y'(z|\lambda, \lambda)\, d\lambda \text{ und } \int_0^1\int_0^1 y'(z|\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu$$

enthalten, zu je einer besonderen Reihe zusammengefaßt, un Ausdrücke selbst jedesmal vor eine Klammer gesetzt.

erücksichtigt man dann die Formeln (2) und (4), sowie die Dar-
ng eines Fredholmschen Minors 3. Ordnung[1]):

$$\left.\begin{matrix} i_1, i_2, i_3 \\ \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} y(z|\varkappa_1, i_1) & y(z|\varkappa_1, i_2) & y(z|\varkappa_1, i_3) \\ y(z|\varkappa_2, i_1) & y(z|\varkappa_2, i_2) & y(z|\varkappa_2, i_3) \\ y(z|\varkappa_3, i_1) & y(z|\varkappa_3, i_2) & y(z|\varkappa_3, i_3) \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{1!}\int_0^1 \begin{vmatrix} y(z|\varkappa_1, i_1) & y(z|\varkappa_1, i_2) & y(z|\varkappa_1, i_3) & y(z|\varkappa_1, \lambda_1) \\ y(z|\varkappa_2, i_1) & y(z|\varkappa_2, i_2) & y(z|\varkappa_2, i_3) & y(z|\varkappa_2, \lambda_1) \\ y(z|\varkappa_3, i_1) & y(z|\varkappa_3, i_2) & y(z|\varkappa_3, i_3) & y(z|\varkappa_3, \lambda_1) \\ y(z|\lambda_1, i_1) & y(z|\lambda_1, i_2) & y(z|\lambda_1, i_3) & y(z|\lambda_1, \lambda_1) \end{vmatrix} d\lambda_1$$

$$+ \cdots \text{ in inf.},$$

iält man:

$$\frac{d}{dz} D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$$

$$\ldots y'(z|\varkappa_1, i_1) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right) + y'(z|\varkappa_2, i_1) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_1 \end{matrix}\right) + y'(z|\varkappa_1, i_2) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right)$$

$$- y'(z|\varkappa_2, i_2) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_1 \end{matrix}\right)$$

$$\ldots y'(z|\lambda, i_1) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \lambda, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix}\right) + y'(z|\lambda, i_2) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \lambda \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix}\right) + y'(z|\varkappa_1, \lambda) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \lambda, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$$

$$+ y'(z|\varkappa_2, \lambda) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \lambda \end{matrix}\right)\Bigg\} d\lambda$$

$$\ldots\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix}\right) \int_0^1 y'(z|\lambda, \lambda)\, d\lambda + \int_0^1\!\!\int_0^1 y'(z|\lambda, \mu) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2, \lambda \\ \varkappa_1, \varkappa_2, \mu \end{matrix}\right) d\lambda\, d\mu,$$

wie man sofort aus den Reihendarstellungen sieht:

$$D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_2, i_1 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = - D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$$

benso

$$D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_2, \varkappa_1 \end{matrix}\right) = - D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix}\right).$$

. Es würde keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten bereiten, die
n vorangegangenen Nummern angewandte Methode zur Herlei-
der Differentiationsformeln für Fredholmsche Minoren beliebiger
ng anzuwenden. Indessen wird das Verfahren bei Minoren höherer
ng sehr umständlich. Daher soll im folgenden ein Satz herge-
werden, der es ermöglicht die Differentiationsregel für einen Mi-
eliebiger Ordnung in einfacherer Weise abzuleiten.

Er lautet[1]):

$$(7) \qquad D_y^{p-1}(z)\, D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix} \right.\right) = \left| D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix} \right.\right) \right|_{\alpha, \beta = 1, 2 \cdots p}.$$

Wir beweisen diese Formel zunächst für $p = 2$.

Zwischen den Fredholmschen Minoren erster und zweit besteht die Beziehung[2]):

$$(8) \quad D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) + \int_0^1 y(z|\varkappa_1, \lambda)\, D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \lambda, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) d\lambda = - y(z|\varkappa_1, i$$

$$+ y(z|\varkappa_1, i_2) I$$

Diese Gleichung kann als lineare Integralgleichung für

als Funktion von $\varkappa_1$ aufgefaßt werden. i_1, i_2 und $\varkappa_2$ spiele von Parametern. Der Kern der Integralgleichung ist $y($ Fredholmsche Lösung von (8) ergibt:

$$D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) = - y(z|\varkappa_1, i_1) D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) + y(z|\varkappa_1, i_2) D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)$$

$$+ \int_0^1 \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_1 \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)} \left[- y(z|\lambda, i_1) D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) + y(z|\lambda, i_2) D \right.$$

Wir multiplizieren hier mit $D_y(z)$ und verwenden dann die I

$$(9) \qquad y(z|\varkappa, i) D_y(z) + \int_0^1 y(z|\lambda, i) D_y\left(z \left| \begin{matrix} \lambda \\ \varkappa \end{matrix} \right.\right) d\lambda = - D_y\left(z \left| \begin{matrix} i \\ \varkappa \end{matrix} \right.\right.$$

So folgt:

$$D_y(z) D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) = \left| \begin{matrix} D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_1 \end{matrix} \right.\right) & D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) \\ D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_1 \end{matrix} \right.\right) & D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) \end{matrix} \right|.$$

Für beliebiges p beweisen wir die Formel (7) durch einen $p - 1$ auf p.

---

1) Dieser Satz stammt von Plemelj, Monatshefte f. Math. u. Ph S. 101, Formel (10). P. benützt die Formel zur Definition der Min Ordnung. — Vgl. auch Hahn, Jahresber. d. dtsch. Math.-Ver. **20** (Formel (27).

2) Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., S. 486, Formel (4) für p =

3) Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., S. 474, Formel (15).

s sei also vorausgesetzt, daß

$$D_y^{p-2}(z)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_{p-1} \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_{p-1}\end{matrix}\right) = \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta\end{matrix}\right)\right|_{\alpha,\beta=1,2\cdots p-1}.$$

esteht zwischen den Fredholmschen Minoren $(p-1)$ter und rdnung die Beziehung[1]):

$$D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right) + \int_0^1 y(z|\varkappa_1, \lambda)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2, \dots i_p \\ \lambda, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right) d\lambda$$
$$= - y(z|\varkappa_1, i_1)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_2, i_3 \dots i_p \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right)$$
$$+ y(z|\varkappa_1, i_2)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_3 \dots i_p \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right)$$
$$- + \cdots + (-1)^p y(z|\varkappa_1, i_p)\, D_y\begin{pmatrix} i_1, i_2 \dots i_{p-1} \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{pmatrix}.$$

leichung fassen wir als lineare Integralgleichung für

$$D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right)$$

ktion von $\varkappa_1$ auf mit dem Kerne $y(z|\varkappa_1, \lambda)$. Die Veränderlichen $. i_p; \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p$ sind als Parameter zu betrachten. Die Fredhe Auflösung dieser Gleichung gibt:

$$D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right)$$
$$(z|\varkappa_1, i_1)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_2, i_3 \dots i_p \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right) + y(z|\varkappa_1, i_2)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_3 \dots i_p \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right)$$
$$\cdots + (-1)^p\, y(z|\varkappa_1, i_p)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_{p-1} \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right)$$
$$\int^1 \frac{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\lambda \\ \varkappa_1\end{matrix}\right)}{D_y(z)} \Bigg[- y(z|\lambda, i_1)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_2, i_3 \dots i_p \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right) + y(z|\lambda, i_2)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_3 \dots i_p \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right)$$
$$- + \cdots + (-1)^p y(z|\lambda, i_p)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_{p-1} \\ \varkappa_2, \varkappa_3 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right)\Bigg] d\lambda.$$

iziert man hier mit $D_y^{p-1}(z)$ und setzt man für die Minoren)ter Ordnung ihre Werte aus Formel (10) und für die mit ihnen izierten Ausdrücke ihre Werte aus Formel (9) ein, so erhält

$$D_y^{p-1}(z)\, D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$= D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_1 \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right|_{\alpha, \beta = 2, 3 \cdots p} - D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_1 \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_\gamma \\ \varkappa_\delta \end{matrix}\right) \right|_{\substack{\gamma = 1, 3 \cdots p \\ \delta = 2, 3 \cdots p}}$$

$$+ - \cdots + (-1)^{p-1} D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_p \\ \varkappa_1 \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_\lambda \\ \varkappa_\mu \end{matrix}\right) \right|_{\substack{\lambda = 1, 2 \cdots p-1 \\ \mu = 2, 3 \cdots p}}.$$

Hier ist aber die rechte Seite nichts anderes als die Entwicklung der Determinante

$$\left| D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right|_{\alpha, \beta = 1, 2 \cdots p}$$

nach der ersten Spalte. Wir erhalten also die Formel (7). Wenn diese Formel für die Minoren $(p-1)$ter Ordnung gilt, so gilt sie also auch für die Minoren $p$ter Ordnung. Nun ist sie bewiesen für $p = 2$, sie gilt also allgemein.

5. Wir differenzieren Formel (7) nach z. Die dabei rechts auftretenden Determinanten denken wir uns nach den Reihen entwickelt, in denen die Ableitungen der Minoren stehen und erhalten so:

$$(p-1) D_y^{p-2}(z) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right) \frac{d D_y(z)}{dz}$$

$$+ D_y^{p-1}(z) \frac{d}{dz} D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} \left| D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right|_{\substack{\alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots p \\ \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1 \cdots p}} \frac{d}{dz} D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_r \\ \varkappa_s \end{matrix}\right).$$

Hier werden für die Ableitungen der Minoren 1. Ordnung die Ausdrücke aus Formel (5) eingesetzt und berücksichtigt, daß nach Formel (7)

$$D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_r, \lambda \\ \varkappa_s, \mu \end{matrix}\right) = \frac{1}{D_y(z)} \left\{ D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_r \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix}\right) - D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_r \\ \mu \end{matrix}\right) D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \right\}.$$

$$\ldots D_y^{p-2}(z)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right) \frac{d D_y(z)}{dz}$$

$$+ D_y^{p-1}(z) \frac{d}{dz} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$\ldots{}^{r+s-1} y'(z|\varkappa_s, i_r) D_y(z) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right|$$

$$\ldots, i_r) \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right|$$

$$- \sum_{s=1}^{p} y'(z|\varkappa_s, \lambda) \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+s} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \lambda \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right| \Bigg\} d\lambda$$

$$\sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right|$$

$$\ldots z|\lambda, \mu) \Bigg\{ D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix}\right) \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right|$$

$$- \sum_{r=1}^{p} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \mu \end{matrix}\right) \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right| \Bigg\}.$$

$$\alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots p;\ \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1 \cdots p$$

…dung der Formel (7) erhält man für einige der hier auf-
…men folgendes:

$$\ldots D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right| = D_y^{p-1}(z)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots \lambda \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_r \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$\begin{matrix} \alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots p \\ \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1 \cdots p \end{matrix}$$

$$\ldots D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \lambda \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right| = D_y^{p-1}(z)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_s \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \lambda \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$\begin{matrix} \alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots p \\ \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1 \cdots p \end{matrix}$$

$$\ldots D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right| = D_y^{p-1}(z)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right),$$

$$\begin{matrix} \alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots p \\ \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1 \cdots p \end{matrix}$$

$$\ldots{}^{+s} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right| = p\, D_y^{p-1}(z)\, D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right).$$

$$\begin{matrix} \alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots p \\ \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1 \cdots p \end{matrix}$$

$$\sum_{r=1}^{p} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \mu \end{matrix}\right) \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_s \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right) \right|_{\substack{\alpha=1,2\cdots r-1,r+1\cdots p \\ \beta=1,2\cdots s-1,\, s+1\cdots p}}$$

$$= \sum_{r=1}^{p} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \mu \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa \end{matrix}\right) \right|_{\substack{i=i_1,i_2\cdots\lambda\cdots i_p \\ \varkappa=\varkappa_1,\varkappa_2\cdots\varkappa_r\cdots\varkappa_p}}$$

$$= -\sum_{r=1}^{p} (-1)^{p+r+1} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_r \\ \mu \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa \end{matrix}\right) \right|_{\substack{i=i_1,i_2\cdots i_{r-1},\, i_{r+1}\cdots i_p,\lambda \\ \varkappa=\varkappa_1,\varkappa_2\cdots\varkappa_{r-1},\varkappa_r\cdots\varkappa_{p-1},\varkappa_p}}$$

$$= -\left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa \end{matrix}\right) \right|_{\substack{i=i_1,i_2\cdots i_p,\lambda \\ \varkappa=\varkappa_1,\varkappa_2\cdots\varkappa_p,\mu}} + D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix}\right) \left| D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_\gamma \\ \varkappa_\delta \end{matrix}\right) \right|_{\substack{\gamma=1,2\cdots p \\ \delta=1,2\cdots p}}$$

$$= -D_y^p(z) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_p, \lambda \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p, \mu \end{matrix}\right) + D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix}\right) D_y^{p-1}(z) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \end{matrix}\right.$$

Diese Werte setzen wir in Gleichung (*) ein und ebenso den von $\frac{d D_y(z)}{dz}$ aus Formel (3). Wir erhalten so:

(12) $$\frac{d}{dz} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s-1} y'(z|\varkappa_s, i_r) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_{r-1}, i_{r+1} \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_{s-1}, \varkappa_{s+1} \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$-\int_0^1 \Big\{ \sum_{r=1}^{p} y'(z|\lambda, i_r) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots \lambda \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_r \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} y'(z|\varkappa_s, \lambda) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_s \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \lambda \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$+ D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p \end{matrix}\right) \int_0^1 y'(z|\lambda, \lambda)\, d\lambda$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 y'(z|\lambda, \mu) D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2 \ldots i_p, \lambda \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p, \mu \end{matrix}\right) d\lambda\, d\mu.$$

II. Die Minoren eines komponierten Kernes.

Besteht zwischen den Feldern $\mathfrak{y}(i, \varkappa)$, $y(i, \varkappa)$ und $c(i, \varkappa)$ die
ung

$$\mathfrak{y}(\varkappa, i) = y(\varkappa, i) + c(\varkappa, i) + \int_0^1 y(\varkappa, \lambda)\, c(\lambda, i)\, d\lambda,$$

nt man $\mathfrak{y}(\varkappa, i)$ aus $y(\varkappa, i)$ und $c(\varkappa, i)$ komponiert und schreibt
ziehung (13) auch symbolisch[1])

$$\{\mathfrak{y}(\varkappa, i)\} = \{y(\varkappa, i)\}\{c(\varkappa, i)\}.$$

t

$$\{\mathfrak{y}(\varkappa, i)\}^{-1} = \{c(\varkappa, i)\}^{-1}\{y(\varkappa, i)\}^{-1},$$

$\varkappa, i)\}^{-1}$ das inverse Feld oder der lösende Kern zu $\{\mathfrak{y}(\varkappa, i)\}$,

$$\{\mathfrak{y}(\varkappa, i)\}^{-1} = \left\{\frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i}{\varkappa}}{D_{\mathfrak{y}}}\right\}$$

d ebenso

$$\{c(\varkappa, i)\}^{-1} = \left\{\frac{D_c\binom{i}{\varkappa}}{D_c}\right\}$$

$$\{y(\varkappa, i)\}^{-1} = \left\{\frac{D_y\binom{i}{\varkappa}}{D_y}\right\}.$$

wir diese Ausdrücke in Gleichung (14) ein, so erhalten wir

$$\left\{\frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i}{\varkappa}}{D_{\mathfrak{y}}}\right\} = \left\{\frac{D_c\binom{i}{\varkappa}}{D_c}\right\}\left\{\frac{D_y\binom{i}{\varkappa}}{D_y}\right\}$$

sführlich geschrieben

$$\frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i}{\varkappa}}{D_{\mathfrak{y}}} = \frac{D_c\binom{i}{\varkappa}}{D_c} + \frac{D_y\binom{i}{\varkappa}}{D_y} + \int_0^1 \frac{D_c\binom{i}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa}}{D_y}\, d\lambda.$$

ermittels dieser Gleichung und der Formel (7) kann man nun
chwierigkeit eine Darstellung der Fredholmschen Minoren eines
ierten Feldes durch die Fredholmschen Minoren seiner Kompo-
geben. Da die Rechnung aber in dem allgemeinen Falle eines
beliebiger $p$ter Ordnung recht umständlich wird, so soll das
en hier nur für den Fall $p = 2$ durchgeführt werden.

s Formel (7) ergibt sich

$$\frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_{\mathfrak{y}}} = \frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_{\mathfrak{y}}}\,\frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_{\mathfrak{y}}} - \frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_{\mathfrak{y}}}\,\frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_{\mathfrak{y}}}.$$

Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 106.

Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., § 183 S. 474 ff.

$$\frac{D_\mathfrak{y}\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_\mathfrak{y}} = \left[\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_c} + \int_0^1 \frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\,d\lambda\right]$$

$$\cdot\left[\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_c} + \int_0^1 \frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y}\,d\lambda\right]$$

$$-\left[\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_c} + \int_0^1 \frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y}\,d\lambda\right]$$

$$\cdot\left[\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_c} + \int_0^1 \frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\,d\lambda\right]$$

oder anders geordnet

$$(*)\quad \begin{aligned}
\frac{D_\mathfrak{y}\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_\mathfrak{y}} &= \left[\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_y} - \frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_y}\right] \\
&+ \left[\frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_c}\,\frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_c} - \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_c}\right] + \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_y} \\
&- \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_y} - \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_y} \\
&+ \int_0^1 \Bigg\{\left[\frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_c} - \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\right]\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y} \\
&\qquad + \left[\frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_c}\,\frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c} - \frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_c}\right]\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y} \\
&\qquad + \frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\left[\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_y} - \frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_y}\right] \\
&\qquad + \frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\left[\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y} - \frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\right]\Bigg\}\,d\lambda \\
&+ \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{\mu}{\varkappa_2}}{D_y}\left[\frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_c\binom{i_2}{\mu}}{D_c} - \frac{D_c\binom{i_1}{\mu}}{D_c}\,\frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\right]
\end{aligned}$$

(7) und erhalten so:

$$\frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_{\mathfrak{y}}} = \frac{D_y\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_c} + \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_c}\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_y} - \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_c}\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_y}$$

$$- \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_c}\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_c}\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_y}$$

$$+\int_0^1 \left\{\frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \varkappa_2}}{D_c}\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \lambda}}{D_c}\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\frac{D_y\binom{\lambda,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_y}\right.$$

$$\left. + \frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\frac{D_y\binom{i_1,\, \lambda}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_y}\right\} d\lambda$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \mu}}{D_c}\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\frac{D_y\binom{\mu}{\varkappa_2}}{D_y}\, d\lambda\, d\mu.$$

...ssen sich die p-reihigen Determinanten einer komponierten Ma-...ear und homogen aus Determinanten einer jeden ihrer Kompo-... zusammensetzen.[1] Um auch hier zu erreichen, daß die Minoren ...nzelnen Komponente linear und überdies die Minoren der bei-...mponenten gleichberechtigt in dem Ausdruck für den Minor ...nponierten Feldes auftreten, formen wir das auf der rechten ...er Gleichung (16) auftretende Doppelintegral etwas um.

... ist nämlich

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \mu}}{D_c}\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\frac{D_y\binom{\mu}{\varkappa_2}}{D_y}\, d\lambda\, d\mu$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left[\frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \mu}}{D_c}\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\frac{D_y\binom{\mu}{\varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\mu,\, \lambda}}{D_c}\frac{D_y\binom{\mu}{\varkappa_1}}{D_y}\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y}\right] d\lambda\, d\mu,$$

... die beiden Summanden unter dem Doppelintegral ja nur durch ...chung der Integrationsveränderlichen unterscheiden. Nun ist

$$D_c\binom{i_1,\, i_2}{\mu,\, \lambda} = -D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \mu},$$

[1] Vgl. z. B. Kowalewski, a. a. O., S. 72, Satz 26.

2*

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \mu}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{\mu}{\varkappa_2}}{D_y}\,d\lambda\, d\mu$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \mu}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda,\,\mu}{\varkappa_1,\,\varkappa_2}}{D_y}\,d\lambda\, d\mu$$

nach Formel (7).

In (16) eingesetzt gibt

$$\text{(16a)}\quad \frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_{\mathfrak{y}}} = \frac{D_y\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_c} + \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_y}$$

$$- \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_y} - \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_y}$$

$$+ \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_y}$$

$$+ \int_0^1 \Big\{ \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y}$$

$$+ \frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1,\, \lambda}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_y} \Big\}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \mu}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda,\,\mu}{\varkappa_1,\,\varkappa_2}}{D_y}\,d\lambda\, d\mu.$$

In dieser Gestalt läßt sich die Formel auch durch den Fredhol
Grenzübergang aus dem oben erwähnten Determinantensatz direk
leiten.

Eine weitere Form der Darstellung, die zwar etwas weniger
sichtlich ist, aber für spätere Untersuchungen (Zweiter Abschnit
von Nutzen sein wird, erhält man, wenn man in der Gleichu
die Ausdrücke in der dritten und vierten eckigen Klammer unte
ersten Integral anders ordnet und die übrigen eckigen Klammer
mittels Formel (7) umformt. Es ergibt sich so

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{D_{\mathfrak{y}}\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_{\mathfrak{y}}} = {} & \frac{D_y\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \varkappa_2}}{D_c} + \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_y} \\
& - \frac{D_c\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_y} - \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_y} \\
& + \frac{D_c\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_y} \\
& + \int_0^1 \Bigg\{ \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \varkappa_2}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y} + \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\varkappa_1,\, \lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y} \\
& \qquad + \frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\left[\frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_2}}{D_y} - \frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_2}}{D_y}\right] \\
& \qquad + \frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_2}}{D_y}\left[\frac{D_c\binom{i_2}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_1}{\varkappa_1}}{D_y} - \frac{D_c\binom{i_1}{\lambda}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{i_2}{\varkappa_1}}{D_y}\right]\Bigg\}\, d\lambda \\
& + \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{D_c\binom{i_1,\, i_2}{\lambda,\, \mu}}{D_c}\,\frac{D_y\binom{\lambda}{\varkappa_1}}{D_y}\,\frac{D_y\binom{\mu}{\varkappa_2}}{D_y}\, d\lambda\, d\mu.
\end{aligned}
$$

Zweiter Abschnitt.

Über eine neue Art von Integrodifferentialgleichungen.

I. Die Differentialgleichung für die Fredholmsche Determinante und die Integrodifferentialgleichungen für ihre Minoren.

1. Es sei $y(z|i,\varkappa)$ ein Lösungsfeld der Feldgleichung

$$\frac{dy(z|i,\varkappa)}{dz} = a(z|i,\varkappa) + \int_0^1 y(z|i,\lambda)\,a(z|\lambda,\varkappa)\,d\lambda. \tag{17}$$

Wir differenzieren die zu $y(z|i,\varkappa)$ gehörige Fredholmsche Determinante $D_y(z)$ nach Formel (3) und berücksichtigen dabei, daß $y(z|i,\varkappa)$ eine Lösung der Integrodifferentialgleichung (17) sein soll

$$\begin{aligned}\frac{dD_y(z)}{dz} = D_y(z)\int_0^1 a(z|i,i)\,di \\ + \int_0^1\int_0^1 a(z|\lambda,i)\Big\{ D_y(z)\,y(z|i,\lambda) + D_y\left(z\,\middle|\,{\lambda \atop i}\right) \\ + \int_0^1 y(z|x,\lambda)\,D_y\left(z\,\middle|\,{x \atop i}\right)dx\Big\}\,di\,d\lambda.\end{aligned}$$

Nun verschwindet aber der Ausdruck in der geschweiften Klammer nach Formel (9). Wir erhalten also

$$\frac{dD_y(z)}{dz} = D_y(z)\int_0^1 a(z|i,i)\,di \tag{18}$$

und durch Auflösung die weitere Gleichung[1]

$$D_y(z) = e^{\int_0^z dz\int_0^1 a(z|i,i)\,di}. \tag{19}$$

Diese Formel ist einem von **Jacobi**[2] in der Theorie der linearen Differentialsysteme aufgestellten Satze analog.

2. Wir differenzieren jetzt den Minor $D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right)$ des Lösungsfeldes $y(z|i,\varkappa)$ der Integrodifferentialgleichung (17) nach Formel (5) und erhalten bei geeigneter Zusammenfassung

$$\frac{d}{dz} D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right)$$

$$= -a(z|\varkappa,i)D_y(z) - \int_0^1 a(z|\varkappa,\lambda)D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \lambda\end{matrix}\right) + D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right)\int_0^1 a(z|\lambda,\lambda)\,d\lambda$$

$$-\int_0^1 a(z|\lambda,i)\,d\lambda\left\{y(z|\varkappa,\lambda)D_y(z) + D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \varkappa\end{matrix}\right) + \int_0^1 y(z|\mu,\lambda)D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \mu \\ \varkappa\end{matrix}\right)d\mu\right\}$$

$$-\int_0^1\int_0^1 a(z|\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu\left\{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda, i \\ \varkappa, \mu\end{matrix}\right) + y(z|\varkappa,\lambda)D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \mu\end{matrix}\right)\right.$$

$$- y(z|\mu,\lambda)D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right)$$

$$\left. + \int_0^1 y(z|\nu,\lambda)D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \nu, i \\ \varkappa, \mu\end{matrix}\right)d\nu\right\},$$

wobei davon Gebrauch gemacht ist, daß

$$D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda, i \\ \varkappa, \mu\end{matrix}\right) = -D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i, \lambda \\ \varkappa, \mu\end{matrix}\right).$$

Nun verschwindet der Ausdruck in der ersten Klammer nach Formel (9), und der Ausdruck in der zweiten Klammer nach Formel (8), wenn man dort überall $y(z|i,\varkappa)$ durch $y(z|\varkappa,i)$ ersetzt. Wir erhalten also:

$$\frac{d}{dz}D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right) = -a(z|\varkappa,i)D_y(z) - \int_0^1 D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \lambda\end{matrix}\right)a(z|\varkappa,\lambda)\,d\lambda + D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right)\int_0^1 a(z|\lambda,\lambda)\,d\lambda. \tag{20}$$

Um noch eine Vereinfachung zu erzielen, bilden wir

$$\frac{d}{dz}\frac{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right)}{D_y(z)} = \frac{1}{D_y(z)}\frac{d}{dz}D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right) - \frac{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right)}{D_y^2(z)}\frac{d\,D_y(z)}{dz}.$$

Setzen wir rechts für die Differentialquotienten die Werte aus (18) und (20) ein, so ergibt sich

$$\frac{d}{dz}\frac{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \varkappa\end{matrix}\right)}{D_y(z)} = -a(z|\varkappa,i) - \int_0^1 \frac{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i \\ \lambda\end{matrix}\right)}{D_y(z)}a(z|\varkappa,\lambda)\,d\lambda. \tag{21}$$

Der Ausdruck $\dfrac{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i\\ \varkappa\end{matrix}\right)}{D_y(z)}$ genügt also der Integrodifferentialgle

$$(22)\qquad \frac{d}{dz}\,U(z|i,\varkappa)=b(z|i,\varkappa)+\int_0^1 U(z|i,\lambda)\,b(z|\lambda,\varkappa)\,d\lambda,$$

in der

$$b(z|i,\varkappa)=-\,a(z|\varkappa,i)$$

ist, und welche die zu (17) adjungierte Gleichung heißt.[1])

3. Um nunmehr die Integrodifferentialgleichung für die schen Minoren 2. Ordnung zu erhalten, wird der Minor D nach Formel (6) differenziert unter der Voraussetzung, da ein Lösungsfeld von (17) ist. Nach zweckmäßiger Zusamm erhält man so

$$\frac{d}{dz}D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2\\ \varkappa_1,\varkappa_2\end{matrix}\right)$$

$$=-\,a(z|\varkappa_1,i_1)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_2\\ \varkappa_2\end{matrix}\right)+a(z|\varkappa_2,i_1)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_2\\ \varkappa_1\end{matrix}\right)+a(z|\varkappa_1,i_2)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right.$$

$$-\,a(z|\varkappa_2,i_2)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1\\ \varkappa_1\end{matrix}\right.$$

$$-\int_0^1\left\{a(z|\varkappa_1,\lambda)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1,i_2\\ \lambda,\varkappa_2\end{matrix}\right)+a(z|\varkappa_2,\lambda)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1,i_2\\ \varkappa_1,\lambda\end{matrix}\right)\right\}d\lambda+D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i\\ \varkappa_1,\varkappa\end{matrix}\right.$$

$$-\int_0^1 a(z|\lambda,i_1)\left\{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda, i_2\\ \varkappa_1,\varkappa_2\end{matrix}\right)+y(z|\varkappa_1,\lambda)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_2\\ \varkappa_2\end{matrix}\right)-y(z|\varkappa_2,\lambda)\,D_y\left(\right.\right.$$

$$+\int_0^1 y(z|\mu,\lambda)\,D_y$$

$$+\int_0^1 a(z|\lambda,i_2)\left\{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda, i_1\\ \varkappa_1,\varkappa_2\end{matrix}\right)+y(z|\varkappa_1,\lambda)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right)-y(z|\varkappa_2,\lambda)\,D_y\left(\right.\right.$$

$$+\int_0^1 y(z|\mu,\lambda)\,D_y\left(\right.$$

$$+\int_0^1\!\!\int_0^1 a(z|\lambda,\mu)\left\{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda, i_1, i_2\\ \mu,\varkappa_1,\varkappa_2\end{matrix}\right)+y(z|\mu,\lambda)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2\\ \varkappa_1,\varkappa_2\end{matrix}\right)-y(z|\varkappa_1,\lambda\right.$$

$$+\,y(z|\varkappa_2,\lambda)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, i_2\\ \mu,\varkappa_1\end{matrix}\right)+\int_0^1 y(z|\nu,\lambda)\,D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \nu, i_1\\ \mu,\varkappa\end{matrix}\right.$$

Die Ausdrücke in den Klammern verschwinden mit Ausnahme des ersten, wie man aus Formel (11) für $p = 2$ und $p = 3$ erkennt, wenn man dort überall an Stelle von $y(z|i, \varkappa)$ sich $y(z|\varkappa, i)$ gesetzt denkt. Es ergibt sich also

$$\tag{23} \frac{d}{dz} D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)$$

$$= - D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_1 \end{matrix} \right.\right) a(z|\varkappa_2, i_2) + D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) a(z|\varkappa_1, i_2) + D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_1 \end{matrix} \right.\right) a(z|\varkappa_2, i_1)$$

$$- D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) a(z|\varkappa_1, i_1) - \int_0^1 \left\{ D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \lambda, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) a(z|\varkappa_1, \lambda) \right.$$

$$\left. + D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \lambda \end{matrix} \right.\right) a(z|\varkappa_2, \lambda) \right\} d\lambda$$

$$+ D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) \int_0^1 a(z|\lambda, \lambda) d\lambda.$$

Wir bilden zum Zwecke der Vereinfachung dieser Gleichung

$$\frac{d}{dz} \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)} = \frac{1}{D_y(z)} \frac{d}{dz} D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right) - \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)}{D_y^2(z)} \frac{d}{dz} D_y(z).$$

Setzt man hier die Werte der Differentialquotienten aus (18) und (23) ein, so erhält man

$$\tag{24} \frac{d}{dz} \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)}$$

$$= - \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_1 \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)} a(z|\varkappa_2, i_2) + \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)} a(z|\varkappa_1, i_2) + \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_1 \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)} a(z|\varkappa_2, i_1)$$

$$- \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_2 \\ \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)} a(z|\varkappa_1, i_1)$$

$$- \int_0^1 \left\{ \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \lambda, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)} a(z|\varkappa_1, \lambda) + \frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \lambda \end{matrix} \right.\right)}{D_y(z)} a(z|\varkappa_2, \lambda) \right\} d\lambda.$$

Die Ausdrücke $\frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i \\ \varkappa \end{matrix} \right.\right)}{D_y}$ und $\frac{D_y\left(z \left| \begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \end{matrix} \right.\right)}{D_y}$ genügen also folgendem System von Integrodifferentialgleichungen

$$
(25)\begin{cases}
\frac{d}{dz}U(z|i,\varkappa) = b(z|i,\varkappa) + \int\limits_0^1 U(z|i,\lambda)b(z|\lambda,\varkappa)\,d\lambda \\
\frac{d}{dz}V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right) = U(z|i_1,\varkappa_1)b(z|i_2,\varkappa_2) - U(z|i_1,\varkappa_2)b(z|i_2,\varkappa_1) \\
\qquad - U(z|i_2,\varkappa_1)b(z|i_1,\varkappa_2) + U(z|i_2,\varkappa_2)b(z|i_1,\varkappa_1) \\
\qquad + \int\limits_0^1 \left\{ V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right) b(z|\lambda,\varkappa_1) + V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda\end{matrix}\right.\right) b(z|\lambda,\varkappa_2)\right\} d\lambda,
\end{cases}
$$

wo wieder

$$b(z|i,\varkappa) = -a(z|\varkappa,i)$$

ist.

4. Es ist jetzt leicht, das in der vorhergehenden Nummer gewonnene Ergebnis zu verallgemeinern. Setzen wir nämlich wieder voraus, daß $y(z|i,\varkappa)$ ein Lösungsfeld der Gleichung (17) ist, so ergibt sich aus Formel (12) bei geeigneter Anordnung

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}D_y\left(z\left|\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) \\
&= \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{p}(-1)^{r+s-1} D_y\left(z\left|\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_{s-1}, \varkappa_{s+1} \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) a(z|\varkappa_s, i_r) \\
&- \int\limits_0^1 \sum_{s=1}^{p} D_y\left(z\left|\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \lambda \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) a(z|\varkappa_s,\lambda)\,d\lambda + D_y\left(z\left|\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) \int\limits_0^1 a(z|\lambda,\lambda)\,d\lambda \\
&+ \sum_{r=1}^{p}(-1)^r \int\limits_0^1 a(z|\lambda, i_r)\left\{ D_y\left(z\left|\begin{matrix} \lambda, i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \dots\dots\dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right)\right. \\
&\qquad + \sum_{s=1}^{p}(-1)^{s-1} y(z|\varkappa_s,\lambda) D_y\left(z\left|\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_{s-1}, \varkappa_{s+1} \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) \\
&\qquad + \int\limits_0^1 y(z|\mu,\lambda) D_y\left(z\left|\begin{matrix} \mu, i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \dots\dots\dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) d\mu \\
&+ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 a(z|\lambda,\mu)\left\{ D_y\left(z\left|\begin{matrix} \lambda, i_1, i_2 \dots i_p \\ \mu, \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) + y(z|\mu,\lambda) D_y\left(z\left|\begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right)\right. \\
&\qquad + \sum_{s=1}^{p}(-1)^s y(z|\varkappa_s,\lambda) D_y\left(z\left|\begin{matrix} i_1, i_2, i_3 \dots\dots\dots i_p \\ \mu, \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_{s-1}, \varkappa_{s+1} \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) \\
&\qquad \left. + \int\limits_0^1 y(z|\nu,\lambda) D_y\left(z\left|\begin{matrix} \nu, i_1, i_2 \dots i_p \\ \mu, \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p\end{matrix}\right.\right) d\nu \right\} d\lambda
\end{aligned}
$$

Nun folgt wieder aus Formel (11), daß die beiden Klammerausdrücke verschwinden. Es ist also

$$(26)\qquad \frac{d}{dz} D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s-1} D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_{s-1}, \varkappa_{s+1} \dots \varkappa_p \end{matrix}\right) a(z \,|\, \varkappa_s, i_r)$$

$$- \int_0^1 \sum_{s=1}^{p} D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \lambda \dots \varkappa_p \end{matrix}\right) a(z \,|\, \varkappa_s, \lambda)\, d\lambda + D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right) \int_0^1 a(z \,|\, \lambda, \lambda)\, d\lambda.$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung bilden wir wieder

$$\frac{d}{dz} \frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)}{D_y(z)} = \frac{1}{D_y(z)} \frac{d}{dz} D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right) - \frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)}{D_y{}^2(z)} \frac{d}{dz} D_y(z)$$

und erhalten, indem wir rechts für die Ableitungen die Werte (18) und (26) einsetzen

$$(27)\qquad \frac{d}{dz} \frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)}{D_y(z)}$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s-1} \frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_{s-1}, \varkappa_{s+1} \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)}{D_y(z)} a(z \,|\, \varkappa_s, i_r)$$

$$- \int_0^1 \sum_{s=1}^{p} \frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \lambda \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)}{D_y(z)} a(z \,|\, \varkappa_s, \lambda)\, d\lambda.$$

Berücksichtigen wir nun noch, daß nach Formel (7)

$$\frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_{s-1}, \varkappa_{s+1} \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)}{D_y(z)} = \left| \frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right)}{D_y(z)} \right|_{\substack{\alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p}},$$

so ergibt sich aus (27)

$$(27\,\text{a})\qquad \frac{d}{dz} \frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{matrix}\right)}{D_y(z)} = \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s-1} \left| \frac{D_y\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_\alpha \\ \varkappa_\beta \end{matrix}\right)}{D_y(z)} \right|_{\substack{\alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p}} a(z \,|\, \varkappa_s, i_r)$$

$$\int_0^1 \sum^{p} D_y\left(z \,\middle|\, i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \right.$$

Die Ausdrücke $\frac{D_y\left(z\left|\begin{smallmatrix} i \\ \varkappa \end{smallmatrix}\right.\right)}{D_y(z)}$ und $\frac{D_y\left(z\left|\begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \varkappa_1, \varkappa_2 \dots \varkappa_p \end{smallmatrix}\right.\right)}{D_y(z)}$ genügen
gendeu System von Integrodifferentialgleichungen

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz} U(z|i,\varkappa) = b(z|i,\varkappa) + \displaystyle\int_0^1 U(z|i,\lambda) b(z| \\[2ex] \dfrac{d}{dz} V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right.\right) = \displaystyle\sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} \mid U(z|i_\alpha, \varkappa_\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {\scriptstyle \alpha = 1, 2 \cdots r-1, r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {\scriptstyle \beta = 1, 2 \cdots s-1, s+1} \\[2ex] \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^1 \sum_{s=1}^{p} V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_s, \lambda \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right.\right) b(z|\lambda, \varkappa \end{cases}$$

wo wieder

$$b(z|i,\varkappa) = -\,a(z|\varkappa, i)$$

gesetzt ist.

5. Man kann der Feldgleichung (17) die Gleichun

$$(29)\qquad \frac{dx(z|\varkappa)}{dz} = \int_0^1 x(z|\lambda)\, a(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda,$$

die sogenannte Streckengleichung, an die Seite stellen[1]
eine in bezug auf die komplexe Veränderliche z monog
zug auf die reelle Veränderliche $\varkappa$, den Stellenzeiger, in
$0 \leqq \varkappa \leqq 1$ stetige Funktionenstrecke bedeutet.

Die zu der der Gleichung (17) adjungierten Gleich
ziierte Streckengleichung

$$(30)\qquad \frac{d}{dz} P(z|\varkappa) = \int_0^1 P(z|\lambda)\, b(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda$$

heißt ebenfalls zu (29) adjungiert.

Wir wollen nun die in der zweiten Gleichung de
auftretende Funktion $V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right.\right)$ ebenfalls ein Funktion
wobei aber im Auge zu behalten ist, daß an Stelle des

zeigers $\varkappa$ die p Stellenzeiger $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p$ treten. $V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdots \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right.\right)$ ist also nach dieser Auffassung ein Funktionenfeld mit p Paaren von Stellenzeigern.

Die Funktion $Q\left(z\left|\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \vdots \\ \varkappa_p \end{matrix}\right.\right)$ wäre danach entsprechend als eine Funktionenstrecke mit p Stellenzeigern zu bezeichnen, und der zweiten Gleichung des Systems (28) würde die Streckengleichung entsprechen

$$(31) \qquad \frac{d}{dz} Q\left(z\left|\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \vdots \\ \varkappa_p \end{matrix}\right.\right) = \int_0^1 \sum_{s=1}^{p} Q\left(z\left|\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \vdots \\ \varkappa_{s-1} \\ \lambda \\ \varkappa_{s+1} \\ \vdots \\ \varkappa_p \end{matrix}\right.\right) b(z|\lambda, \varkappa_s)\, d\lambda;$$

der zweiten Gleichung des Systems (25) also insbesondere die Streckengleichung

$$(32) \qquad \frac{d}{dz} Q\left(z\left|\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right.\right) = \int_0^1 \left\{ Q\left(z\left|\begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right.\right) b(z|\lambda, \varkappa_1) + Q\left(z\left|\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \lambda \end{matrix}\right.\right) b(z|\lambda, \varkappa_2) \right\} d\lambda.$$

Es sei schließlich noch erwähnt, daß im folgenden alle vorkommenden Funktionenstrecken und -felder als stetig in bezug auf die Stellenzeiger und als monogen in bezug auf die komplexe Veränderliche z vorausgesetzt werden.

II. Verallgemeinerung der aufgestellten Integrodifferentialgleichungen.

6. Die Form der zweiten Gleichung des Systems (28) und besonders die Form der ihr assoziierten Streckengleichung (31) legt es nahe, diese Gleichungen in der Weise zu verallgemeinern, daß man in der unter dem Integralzeichen stehenden Summe in jeden Summanden ein anderes Koeffizientenfeld $b_s(z|\lambda, \varkappa_s)$ einsetzt. Diesen p Koeffizientenfeldern entsprechend treten dann an die Stelle der ersten Gleichung des Systems (28) p Feldgleichungen mit je einem Paar von Stellenzeigern.

Wir setzen das verallgemeinerte System also in folgender

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dz} U_l(z|i,\varkappa) = b_l(z|i,\varkappa) + \int_0^1 U_l(z|i,\lambda)\, b_l(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda \qquad (l=1,2\cdots p)\\
&\frac{d}{dz} V\left(z \left| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdots \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right.\right) = \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} (-1)^{r+s} \left| U_\beta(z|i_\alpha, \varkappa_\beta) \right|_{\substack{\alpha=1,2\cdots r-1, r+1\cdots p\\ \beta=1,2\cdots s-1, s+1\cdots p}} b_s(z|i_r, \varkappa_s)\\
&\qquad + \int_0^1 \sum_{s=1}^{p} V\left(z \left| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \cdots \\ i_s, \lambda \\ \cdots \\ i_p, \varkappa_p \end{matrix}\right.\right) b_s(z|\lambda, \varkappa_s)\, d\lambda .
\end{aligned}\right.
$$

Der letzten Gleichung dieses Systems entspricht die Streckengleichung

$$
(34)\qquad \frac{d}{dz} Q\left(z \left| \begin{matrix} \varkappa_1 \\ \vdots \\ \varkappa_p \end{matrix}\right.\right) = \int_0^1 \sum_{s=1}^{p} Q\left(z \left| \begin{matrix} \varkappa_1 \\ \vdots \\ \varkappa_{s-1} \\ \lambda \\ \varkappa_{s+1} \\ \vdots \\ \varkappa_p \end{matrix}\right.\right) b_s(z|\lambda, \varkappa_s)\, d\lambda .
$$

Die Behandlung des Systems (33) und der Gleichung (34) gestaltet sich im Falle eines beliebigen p recht umständlich, und wir werden uns daher im folgenden auf die Behandlung des Falles $p = 2$ beschränken. Es scheint jedoch, daß sich alle in diesem speziellen Falle angewandten Methoden und Schlüsse ohne grundsätzliche Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall übertragen lassen.

Wir werden uns also im folgenden mit dem System von Feldgleichungen

$$
(35)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dz} U_1(z|i,\varkappa) = b_1(z|i,\varkappa) + \int_0^1 U_1(z|i,\lambda)\, b_1(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda\\
&\frac{d}{dz} U_2(z|i,\varkappa) = b_2(z|i,\varkappa) + \int_0^1 U_2(z|i,\lambda)\, b_2(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda\\
&\frac{d}{dz} V\left(z \left| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right.\right) = U_1(z|i_1,\varkappa_1)\, b_2(z|i_2,\varkappa_2) - U_2(z|i_1,\varkappa_2)\, b_1(z|i_2,\varkappa_1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - U_1(z|i_2,\varkappa_1)\, b_2(z|i_1,\varkappa_2)\\
&\qquad + U_2(z|i_2,\varkappa_2)\, b_1(z|i_1,\varkappa_1)\\
&\qquad + \int_0^1 \left\{ V\left(z \left| \begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right.\right) b_1(z|\lambda,\varkappa_1) + V\left(z \left| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{matrix}\right.\right) b_2(z|\lambda,\varkappa_2) \right\} d\lambda
\end{aligned}\right.
$$

$$
(36) \qquad \frac{d}{dz} Q\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right)
= \int_0^1 \left\{ Q\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right) b_1(z|\lambda, \varkappa_1) + Q\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \varkappa_1 \\ \lambda \end{matrix}\right) b_2(z|\lambda, \varkappa_2) \right\} d\lambda
$$

beschäftigen.

III. Die allgemeine Lösung.

7. Die allgemeine Lösung der Feldgleichung (22) wird durch die Formel dargestellt[1])

$$
(37) \qquad \mathfrak{U}(z|i,\varkappa) = U(z|i,\varkappa) + c(i,\varkappa) + \int_0^1 c(i,\lambda)\, U(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda,
$$

in der $U(z|i,\varkappa)$ eine partikuläre Lösung von (22) mit nicht verschwindender Fredholmscher Determinante, und $c(i,\varkappa)$ ein willkürliches Konstantenfeld bedeuten. Die allgemeinen Lösungen der beiden ersten Gleichungen des Systems (35) werden also durch entsprechende Formeln dargestellt.

Um das allgemeine Lösungssystem von (35) zu erhalten, müssen wir noch die allgemeine Lösung der letzten Gleichung dieses Systems aufstellen. Da diese Gleichung aus der Gleichung für die Minoren zweiter Ordnung eines Lösungsfeldes von (17) entstanden ist, so wird anzunehmen sein, daß die Formel für die Minoren zweiter Ordnung eines komponierten Feldes einen Ansatz für die allgemeine Lösung geben wird, und zwar zeigt es sich, daß man von der Gestalt (16b) dieser Formel auszugehen hat.

Wir erhalten somit für das allgemeine Lösungssystem von (35) folgenden Ansatz

---

1) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 99, 100.

$$
(38)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{U}_1(z|i,\varkappa) &= U_1(z|i,\varkappa) + c_1(i,\varkappa) + \int_0^1 c_1(i,\lambda)\, U_1(z|\lambda,\varkappa)\, d \\
\mathfrak{U}_2(z|i,\varkappa) &= U_2(z|i,\varkappa) + c_2(i,\varkappa) + \int_0^1 c_2(i,\lambda)\, U_2(z|\lambda,\varkappa)\, d \\
\mathfrak{B}\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right) &= V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right) + C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{pmatrix} + c_1(i_1,\varkappa_1)\, U_2(z| \\
&\quad - c_2(i_1,\varkappa_2)\, U_1(z|i_2,\varkappa_1) - c_1(i_2,\varkappa_1)\, U_2(z|i_1,\varkappa_2 \\
&\quad + c_2(i_2,\varkappa_2)\, U_1(z|i_1,\varkappa_1) \\
&\quad + \int_0^1 \Big\{ C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2\end{pmatrix} U_1(z|\lambda,\varkappa_1) + C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda\end{pmatrix} U_2(z| \\
&\qquad\qquad + c_1(i_1,\lambda)\, U_1(z|\lambda,\varkappa_1)\, U_2(z|i_2 \\
&\qquad\qquad - c_2(i_1,\lambda)\, U_1(z|i_2,\varkappa_1)\, U_2(z|\lambda \\
&\qquad\qquad - c_1(i_2,\lambda)\, U_1(z|\lambda,\varkappa_1)\, U_2(z|i_1 \\
&\qquad\qquad + c_2(i_2,\lambda)\, U_1(z|i_1,\varkappa_1)\, U_2(z|\lambda \\
&\quad + \int_0^1\!\!\int_0^1 C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu\end{pmatrix} U_1(z|\lambda,\varkappa_1)\, U_2(z|\mu,\varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu,
\end{aligned}
\right.
$$

wo also $U_1(z|i,\varkappa)$, $U_2(z|i,\varkappa)$, $V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right)$ ein partikuläres Lösung
von (35) bedeutet, und außer dem Nichtverschwinden der Fr
schen Determinanten von $U_1(z|i,\varkappa)$ und $U_2(z|i,\varkappa)$, wie sich
wird, noch das Nichtverschwinden der Fredholmschen Deter
von $(-U_1(z|i_1,\varkappa_1)\, U_2(z|i_2,\varkappa_2))$ vorausgesetzt werden muß. $V\left(z\left|\begin{matrix} i_1 \\ \varkappa_1\end{matrix}\right.\right.$
gegen braucht keiner Bedingung unterworfen zu werden. $c_1(i,\varkappa)$
$C\begin{pmatrix} i_1, i_2 \\ \varkappa_1, \varkappa_2\end{pmatrix}$ sollen willkürliche Konstantenfelder bedeuten.

Da wir bereits wissen, daß $\mathfrak{U}_1(z|i,\varkappa)$ und $\mathfrak{U}_2(z|i,\varkappa)$ bzw.
gemeinen Lösungen der beiden ersten Gleichungen von (35)
haben wir uns nur noch mit der letzten Gleichung dieses Sys
beschäftigen. Wir beweisen zunächst, daß diese Gleichung du
System (38) befriedigt wird.

$$z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right) = \mathfrak{U}_1(z|i_1, \varkappa_1) b_2(z|i_2, \varkappa_2) - \mathfrak{U}_2(z|i_1, \varkappa_2) b_1(z|i_2, \varkappa_1)$$
$$- \mathfrak{U}_1(z|i_2, \varkappa_1) b_2(z|i_1, \varkappa_2) + \mathfrak{U}_2(z|i_2, \varkappa_2) b_1(z|i_1, \varkappa_1)$$
$$+ \int_0^1 \left\{ \mathfrak{V}\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right) b_1(z|\lambda, \varkappa_1) + \mathfrak{V}\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda\end{matrix}\right.\right) b_2(z|\lambda, \varkappa_2)\right\} d\lambda.$$

ist der erwähnte Beweis erbracht.

Vir weisen jetzt nach, daß jede mit $\mathfrak{U}_1(z|i, \varkappa)$ und $\mathfrak{U}_2(z|i, \varkappa)$ zu-
en ein Lösungssystem von (35) bildende Lösung $\mathfrak{V}\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right)$ der
Gleichung von (35) sich in der Form darstellen läßt, die durch
zte Gleichung von (38) gegeben wird.

s seien $U_1(z|i, \varkappa)$, $U_2(z|i, \varkappa)$, $V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right)$ und $\mathfrak{U}_1(z|i, \varkappa)$, $\mathfrak{U}_2(z|i, \varkappa)$,
$\left.\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right)$ zwei Lösungssysteme von (35), und $c_1(i, \varkappa)$, $c_2(i, \varkappa)$ die
die beiden ersten Gleichungen von (38) definierten Konstanten-

Vir denken uns $C\left(\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right)$ durch die dritte Gleichung von (38) als
ion von z definiert. Diese Gleichung ist eine Integralgleichung
$\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right)$ und ist, wie wir später sehen werden, nach der unbe-
en Funktion auflösbar, wenn vorausgesetzt wird, daß sowohl die
ninanten von $U_1(z|i, \varkappa)$ und $U_2(z|i, \varkappa)$ als auch die Determinante
$-(U_1(z|i_1, \varkappa_1)\, U_2(z|i_2, \varkappa_2))$ von Null verschieden sind. In diesem
zeigt die Fredholmsche Form der Lösung, daß $C\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right)$ nach
renzierbar ist.

Vir differenzieren nun die letzte Gleichung von (38) und berück-
gen links die Gleichungen (38), rechts die Gleichungen (35). Es
sich nach einfacher Reduktion

$$\frac{d}{dz} C\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right)$$
$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dz} C\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right) U_1(z|\lambda, \varkappa_1) + \frac{d}{dz} C\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda\end{matrix}\right.\right) U_2(z|\lambda, \varkappa_2)\right\} d\lambda$$
$$+ \int_0^1\int_0^1 \frac{d}{dz} C\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu\end{matrix}\right.\right) U_1(z|\lambda, \varkappa_1)\, U_2(z|\mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu = 0.$$

st eine lineare homogene Integralgleichung für $\frac{d}{dz} C\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right)$.

Um sie auf eine Form zu bringen, in der die unbekannte Funk noch unter einem Doppelintegral auftritt, machen wir in (39) d stitution[1])

$$\frac{d}{dz} C\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) \tag{40}$$

$$= \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) + \int_0^1 \left\{ \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) \frac{D_{u_1}\left(z \middle| \begin{matrix} \varkappa_1 \\ \lambda \end{matrix}\right)}{D_{u_1}(z)} + \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{matrix}\right) \frac{D_{u_2}\left(z \middle| \begin{matrix} \varkappa_2 \\ \lambda \end{matrix}\right)}{D_{u_2}(z)}$$

Wenn dann noch links

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{matrix}\right) U_1(z | \lambda, \varkappa_1)\, U_2(z | \mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu$$

addiert und subtrahiert wird, so ergibt sich

$$\varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) - \int_0^1 \int_0^1 \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{matrix}\right) U_1(z | \lambda, \varkappa_1)\, U_2(z | \mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) \left[U_1(z | \lambda, \varkappa_1) + \frac{D_{u_1}\left(z \middle| \begin{matrix} \varkappa_1 \\ \lambda \end{matrix}\right)}{D_{u_1}(z)} + \int_0^1 U_1(z | \mu, \varkappa_1) \frac{D_{u_1}\left(z \middle| \begin{matrix} \mu \\ \lambda \end{matrix}\right)}{D_{u_1}(z)}\, d\mu \right] \right.$$

$$+ \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{matrix}\right) \left[U_2(z | \lambda, \varkappa_2) + \frac{D_{u_2}\left(z \middle| \begin{matrix} \varkappa_2 \\ \lambda \end{matrix}\right)}{D_{u_2}(z)} + \int_0^1 U_2(z | \mu, \varkappa_2) \frac{D_{u_2}\left(z \middle| \begin{matrix} \mu \\ \lambda \end{matrix}\right)}{D_{u_2}(z)}\right.$$

$$+ \int_0^1 \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{matrix}\right) \left(U_1(z | \lambda, \varkappa_1) \left[U_2(z | \mu, \varkappa_2) + \frac{D_{u_2}\left(z \middle| \begin{matrix} \varkappa_2 \\ \mu \end{matrix}\right)}{D_{u_2}(z)} \right.\right.$$

$$\left. + \int_0^1 U_2(z | \nu, \varkappa_2) \frac{D_{u_2}\left(z \middle| \begin{matrix} \nu \\ \mu \end{matrix}\right)}{D_{u_2}(z)} \right]$$

$$+ U_2(z | \mu, \varkappa_2) \left[U_1(z | \lambda, \varkappa_1) + \frac{D_{u_1}\left(z \middle| \begin{matrix} \varkappa_1 \\ \lambda \end{matrix}\right)}{D_{u_1}(z)} \right.$$

$$\left. + \int_0^1 U_1(z | \nu, \varkappa_1) \frac{D_{u_1}\left(z \middle| \begin{matrix} \nu \\ \lambda \end{matrix}\right)}{D_{u_1}(z)}\, d\nu \right]$$

Nun verschwinden die Ausdrücke in den eckigen Klammern na mel (9). Also erhalten wir für $\varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$ die lineare homoge gralgleichung

$$\varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) - \int_0^1 \int_0^1 \varphi\left(z \middle| \begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{matrix}\right) U_1(z | \lambda, \varkappa_1)\, U_2(z | \mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu$$

---

1) Vgl. Sinigallia, Rendic. del R. Istit. Lomb., Ser. II Vol. 44 (191

Setzen wir voraus, daß die Fredholmsche Determinante des Kernes:
$(-\, U_1(z|i_1, \varkappa_1)\, U_2(z|i_2, \varkappa_2))$ nicht identisch verschwindet, so folgt daraus

$$\varphi\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = 0,$$

und dann aus Gleichung (40)

$$\frac{d}{dz} C\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = 0.$$

$C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix}$ erweist sich also als Konstantenfeld.

Damit ist bewiesen, daß das System (38) das allgemeine Lösungssystem von (35) ist.

8. Sind $U_1(z|i, \varkappa)$ und $U_2(z|i, \varkappa)$ bzw. Lösungen der beiden ersten Gleichungen von (35), so ist

$$(41) \qquad U_1(z|i, \varkappa),\; U_2(z|i, \varkappa),\; \begin{vmatrix} U_1(z|i_1, \varkappa_1) & U_2(z|i_1, \varkappa_2) \\ U_1(z|i_2, \varkappa_1) & U_2(z|i_2, \varkappa_2) \end{vmatrix}$$

ein Lösungssystem von (35).

In der Tat ist:

$$\frac{d}{dz}\left[U_1(z|i_1, \varkappa_1)\, U_2(z|i_2, \varkappa_2) - U_1(z|i_2, \varkappa_1)\, U_2(z|i_1, \varkappa_2)\right]$$
$$= U_1(z|i_1, \varkappa_1) b_2(z|i_2, \varkappa_2) - U_2(z|i_1, \varkappa_2) b_1(z|i_2, \varkappa_1) - U_1(z|i_2, \varkappa_1) b_2(z|i_1, \varkappa_2)$$
$$+ U_2(z|i_2, \varkappa_2) b_1(z|i_1, \varkappa_1) + \int_0^1 \left\{ \begin{vmatrix} U_1(z|i_1, \lambda) & U_2(z|i_1, \varkappa_2) \\ U_1(z|i_2, \lambda) & U_2(z|i_2, \varkappa_2) \end{vmatrix} b_1(z|\lambda, \varkappa_1) \right.$$
$$\left. + \begin{vmatrix} U_1(z|i_1, \varkappa_1) & U_2(z|i_1, \lambda) \\ U_1(z|i_2, \varkappa_1) & U_2(z|i_2, \lambda) \end{vmatrix} b_2(z|\lambda, \varkappa_2) \right\} d\lambda.$$

Diese Tatsache können wir dazu benutzen, um dem allgemeinen Lösungssystem (38) eine etwas einfachere Gestalt zu geben. Wir gehen dazu von dem partikulären Lösungssystem (41) aus, setzen also in (38)

$$V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} U_1(z|i_1, \varkappa_1) & U_2(z|i_1, \varkappa_2) \\ U_1(z|i_2, \varkappa_1) & U_2(z|i_2, \varkappa_2) \end{vmatrix}.$$

Ferner addieren und subtrahieren wir auf der rechten Seite der dritten Gleichung von (38) den Ausdruck

$$c_1(i_1, \varkappa_1) c_2(i_2, \varkappa_2) - c_1(i_2, \varkappa_1) c_2(i_1, \varkappa_2)$$
$$+ \int_0^1 \left\{ \left[c_1(i_1, \lambda) c_2(i_2, \varkappa_2) - c_1(i_2, \lambda) c_2(i_1, \varkappa_2)\right] U_1(z|\lambda, \varkappa_1) \right.$$
$$\left. + \left[c_1(i_1, \varkappa_1) c_2(i_2, \lambda) - c_1(i_2, \varkappa_1) c_2(i_1, \lambda)\right] U_2(z|\lambda, \varkappa_2) \right\} d\lambda$$
$$+ \int_0^1\!\!\int_0^1 \left[c_1(i_1, \lambda) c_2(i_2, \mu) - c_1(i_2, \lambda) c_2(i_1, \mu)\right] U_1(z|\lambda, \varkappa_1)\, U_2(z|\mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu.$$

Aus der dritten Gleichung von (38) wird dann nach geeign
sammenziehung

$$\mathfrak{B}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$$

$$= \left[U_1(z|i_1, \varkappa_1) + c_1(i_1, \varkappa_1) + \int_0^1 c_1(i_1, \lambda)\, U_1(z|\lambda, \varkappa_1)\, d\lambda\right]$$

$$\cdot \left[U_2(z|i_2, \varkappa_2) + c_2(i_2, \varkappa_2) + \int_0^1 c_2(i_2, \lambda)\, U_2(z|\lambda, \varkappa_2)\, d\lambda\right]$$

$$- \left[U_1(z|i_2, \varkappa_1) + c_1(i_2, \varkappa_1) + \int_0^1 c_1(i_2, \lambda)\, U_1(z|\lambda, \varkappa_1)\, d\lambda\right]$$

$$\cdot \left[U_2(z|i_1, \varkappa_2) + c_2(i_1, \varkappa_2) + \int_0^1 c_2(i_1, \lambda)\, U_2(z|\lambda, \varkappa_2)\, d\lambda\right]$$

$$+ C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} - \left[c_1(i_1, \varkappa_1)\, c_2(i_2, \varkappa_2) - c_1(i_2, \varkappa_1)\, c_2(i_1, \varkappa_2)\right]$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \left[C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} - \Big(c_1(i_1, \lambda)\, c_2(i_2, \varkappa_2) - c_1(i_2, \lambda)\, c_2(i_1, \varkappa_2)\Big)\right] U_1(z|\lambda, \right.$$

$$+ \left[C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} - \Big(c_1(i_1, \varkappa_1)\, c_2(i_2, \lambda) - c_1(i_2, \varkappa_1)\, c_2(i_1, \lambda)\Big)\right] U_2(z|$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left\{ C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} - \Big[c_1(i_1, \lambda)\, c_2(i_2, \mu) \right.$$

$$\left. - c_1(i_2, \lambda)\, c_2(i_1, \mu)\Big] \right\} U_1(z|\lambda, \varkappa_1)\, U_2(z|\mu,$$

Oder, wenn wir die beiden ersten Gleichungen von (38) berück
und

$$(42) \qquad \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} - [c_1(i_1, \varkappa_1)\, c_2(i_2, \varkappa_2) - c_1(i_2, \varkappa_1)\, c_2(i_1,$$

setzen, wo $\mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix}$ dann auch wieder ein willkürliches Ko
feld ist,

$$\mathfrak{B}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \mathfrak{U}_1(z|i_1, \varkappa_1) & \mathfrak{U}_2(z|i_1, \varkappa_2) \\ \mathfrak{U}_1(z|i_2, \varkappa_1) & \mathfrak{U}_2(z|i_2, \varkappa_2) \end{vmatrix}$$

$$+ \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} + \int_0^1 \left\{ \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} U_1(z|\lambda, \varkappa_1) + \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} U_2(z \right.$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} U_1(z|\lambda, \varkappa_1)\, U_2(z|\mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu.$$

$$\mathfrak{U}_1(z|i,\varkappa) = U_1(z|i,\varkappa) + c_1(i,\varkappa) + \int_0^1 c_1(i,\lambda)\, U_1(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda$$

$$\mathfrak{U}_2(z|i,\varkappa) = U_2(z|i,\varkappa) + c_2(i,\varkappa) + \int_0^1 c_2(i,\lambda)\, U_2(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda$$

$$\mathfrak{W}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \mathfrak{U}_1(z|i_1,\varkappa_1) & \mathfrak{U}_2(z|i_1,\varkappa_2) \\ \mathfrak{U}_1(z|i_2,\varkappa_1) & \mathfrak{U}_2(z|i_2,\varkappa_2) \end{vmatrix} + \mathfrak{C}\binom{i_1, \varkappa_1}{i_2, \varkappa_2}$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \mathfrak{C}\binom{i_1, \lambda}{i_2, \varkappa_2} U_1(z|\lambda,\varkappa_1) + \mathfrak{C}\binom{i_1, \varkappa_1}{i_2, \lambda} U_2(z|\lambda,\varkappa_2) \right\} d\lambda$$

$$+ \int_0^1\!\!\int_0^1 \mathfrak{C}\binom{i_1, \lambda}{i_2, \mu} U_1(z|\lambda,\varkappa_1)\, U_2(z|\mu,\varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu.$$

Wir wollen jetzt die allgemeine Lösung der zu der dritten Gleichung
) assoziierten Streckengleichung (36) aufstellen. Sie hat die Form

$$Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right) = C\binom{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \int_0^1 \left\{ C\binom{\lambda}{\varkappa_2} U_1(z|\lambda,\varkappa_1) + C\binom{\varkappa_1}{\lambda} U_2(z|\lambda,\varkappa_2) \right\} d\lambda$$

$$+ \int_0^1\!\!\int_0^1 C\binom{\lambda}{\mu} U_1(z|\lambda,\varkappa_1)\, U_2(z|\mu,\varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu,$$

$\binom{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ eine willkürliche Konstantenstrecke, $U_1(z|i,\varkappa)$ und $U_2(z|i,\varkappa)$
ösungen der beiden ersten Gleichungen von (35) sind, die den
nmer 7 dieses Abschnitts geforderten Bedingungen genügen.
ir beweisen zunächst, daß $Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right)$ die Gleichung (36) befrie-
n der Tat erhalten wir durch Differentiation von (44)

$$\frac{d}{dz} Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right)$$

$$C\binom{\lambda}{\varkappa_2}\left[b_1(z|\lambda,\varkappa_1) + \int_0^1 U_1(z|\lambda,\mu)\, b_1(z|\mu,\varkappa_1)\, d\mu \right]$$

$$+ C\binom{\varkappa_1}{\lambda}\left[b_2(z|\lambda,\varkappa_2) + \int_0^1 U_2(z|\lambda,\mu)\, b_2(z|\mu,\varkappa_2)\, d\mu \right] \Bigg\} d\lambda$$

$$C\binom{\lambda}{\mu}\Bigg\{ U_1(z|\lambda,\varkappa_1)\left[b_2(z|\mu,\varkappa_2) + \int_0^1 U_2(z|\mu,\nu)\, b_2(z|\nu,\varkappa_2)\, d\nu \right]$$

$$+ U_2(z|\mu,\varkappa_2)\left[b_1(z|\lambda,\varkappa_1) + \int_0^1 U_1(z|\lambda,\nu)\, b_1(z|\nu,\varkappa_1)\, d\nu \right] \Bigg\} d\lambda\, d\mu.$$

$(-U_1(z|i_1,\varkappa_1)\,U_2(z|i_2,\varkappa_2))$ für $z=z_0$ verschwinden, so ist dort ihre Fredholmsche Determinante gleich 1. Das folgt sofort aus der Reihe (1) für die Fredholmsche Determinante, in der, wenn die betrachtete Funktion von den vier Stellenzeigern $i_1,\varkappa_1;\,i_2,\varkappa_2$ abhängt, an Stelle von i und $\varkappa$ die Paare von Veränderlichen i_1,i_2 bzw. $\varkappa_1,\varkappa_2$ einzusetzen sind. Wir können also jedes andere Lösungssystem $\mathfrak{U}_1(z|i,\varkappa)$, $\mathfrak{U}_2(z|i,\varkappa)$, $\mathfrak{V}\left(z\middle|\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right)$ durch das System (50) vermittels der Gleichungen (38) darstellen. $c_1(i,\varkappa)$, $c_2(i,\varkappa)$, $C\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix}$ sind dann die Anfangswerte des betreffenden Systems für $z=z_0$.

Aus (43) folgt ferner, daß eine Lösung $\mathfrak{V}\left(z\middle|\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right)$ der letzten Gleichung von (35) darstellbar ist als Determinante

$$\mathfrak{U}_1(z|i_1,\varkappa_1)\,\mathfrak{U}_2(z|i_2,\varkappa_2)-\mathfrak{U}_1(z|i_2,\varkappa_1)\,\mathfrak{U}_2(z|i_1,\varkappa_2)$$

von Lösungen der beiden ersten Gleichungen von (35), die mit ihr ein Lösungssystem bilden, wenn ihr Anfangswert $C\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix}$ für $z=z_0$ in der Form

$$C\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix}=c_1(i_1,\varkappa_1)c_2(i_2,\varkappa_2)-c_1(i_2,\varkappa_1)c_2(i_1,\varkappa_2)$$

darstellbar ist, denn dann wird nach (42)

$$\mathfrak{C}\begin{pmatrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{pmatrix}=0.$$

$c_1(i,\varkappa)$ und $c_2(i,\varkappa)$ sind dann bzw. die Anfangswerte von $\mathfrak{U}_1(z|i,\varkappa)$ und $\mathfrak{U}_2(z|i,\varkappa)$ für $z=z_0$.

11. Wir wollen jetzt die Reihen (50) nach einem Punkte z_1 ihres Konvergenzbereichs analytisch fortsetzen. Von den Koeffizientenfeldern $b_1(z|i,\varkappa)$ und $b_2(z|i,\varkappa)$ setzen wir dabei voraus, daß sie allenthalben eindeutig seien.

Wir denken uns also in den Reihen (50) die Substitution

$$z-z_0=(z-z_1)+(z_1-z_0)$$

gemacht. Die so erhaltenen nach Potenzen von $(z-z_1)$ fortschreitenden Reihen $\overline{U}_1(z|i,\varkappa)$, $\overline{U}_2(z|i,\varkappa)$, $\overline{V}\left(z\middle|\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right)$ werden dann sicher für

$$|z-z_1|<R-|z_1-z_0|$$

konvergieren also nicht nur die analytischen Fortsetzungen von $U_1(z|i,\varkappa)$ und $U_2(z|i,\varkappa)$ [1]) sondern auch die analytische Fortsetzung von $V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$ und diese Fortsetzungen bilden dort ein Lösungssystem.

Wir können also schließen, daß die aus den Reihen (50) durch gleichzeitige analytische Fortsetzung entstehenden monogenen analytischen Funktionen holomorph sind in dem ganzen Holomorphiebereich der beiden Koeffizientenfelder $b_1(z|i,\varkappa)$ und $b_2(z|i,\varkappa)$ und dort ein Lösungssystem von (35) bilden.

12. Es sei nun $z = p$ für wenigstens eines der Koeffizientenfelder ein isolierter singulärer Punkt, etwa ein Pol. Dann wird ein durch die Anfangswerte $\varphi_0(i,\varkappa)$, $\Phi_0(i,\varkappa)$, $\chi_0\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix}$ für den regulären Punkt $z = z_0$ definiertes Lösungssystem $U_1(z|i,\varkappa)$, $U_2(z|i,\varkappa)$, $V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$ im allgemeinen in der Umgebung von $z = p$ nicht mehr eindeutig sein. Setzen wir dieses Lösungssystem also auf einem Wege fort, der den Punkt p umschließt und zu dem Punkte z_0 zurückkehrt, so wird es sich in ein anderes Lösungssystem $\overline{U}_1(z|i,\varkappa)$, $\overline{U}_2(z|i,\varkappa)$, $\overline{V}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$ verwandelt haben. Erfüllt das ursprüngliche Lösungssystem die in Nummer 7 angeführten Bedingungen, so wird sich das neue Lösungssystem durch das ursprüngliche vermittels der Gleichungen (38) darstellen lassen. Das System von Anfangswerten $\varphi_0(i,\varkappa)$, $\Phi_0(i,\varkappa)$, $\chi_0\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix}$ geht also dann über in das System

$$
(52)\quad \left\{
\begin{aligned}
\bar{\varphi}_0(i,\varkappa) &= \varphi_0(i,\varkappa) + c_1(i,\varkappa) + \int_0^1 c_1(i,\lambda)\,\varphi_0(\lambda,\varkappa)\,d\lambda \\
\bar{\Phi}_0(i,\varkappa) &= \Phi_0(i,\varkappa) + c_2(i,\varkappa) + \int_0^1 c_2(i,\lambda)\,\Phi_0(\lambda,\varkappa)\,d\lambda \\
\bar{\chi}_0\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} &= \chi_0\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} + c_1(i_1,\varkappa_1)\,\Phi_0(i_2,\varkappa_2) \\
&\qquad - c_2(i_1,\varkappa_2)\,\varphi_0(i_2,\varkappa_1) - c_1(i_2,\varkappa_1)\,\Phi_0(i_1,\varkappa_2) \\
&\qquad + c_2(i_2,\varkappa_2)\,\varphi_0(i_1,\varkappa_1) \\
&\quad + \int_0^1 \Big\{ C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} \varphi_0(\lambda,\varkappa_1) + C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} \Phi_0(\lambda,\varkappa_2) \\
&\qquad + c_1(i_1,\lambda)\,\varphi_0(\lambda,\varkappa_1)\,\Phi_0(i_2,\varkappa_2) - c_2(i_1,\lambda)\,\varphi_0(i_2,\varkappa_1)\,\Phi_0(\lambda,\varkappa_2) \\
&\qquad - c_1(i_2,\lambda)\,\varphi_0(\lambda,\varkappa_1)\,\Phi_0(i_1,\varkappa_2) + c_2(i_2,\lambda)\,\varphi_0(i_1,\varkappa_1)\,\Phi_0(\lambda,\varkappa_2) \Big\} \\
&\quad + \int_0^1\!\!\int_0^1 C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} \varphi_0(\lambda,\varkappa_1)\,\Phi_0(\mu,\varkappa_2)\,d\lambda\,d\mu.
\end{aligned}
\right.
$$

[1]) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 101.

Die Fredholmschen Determinanten von $c_1(i, \varkappa)$ und $c_2(i, \varkappa)$ sin
von Null verschieden.[1])

13. Um auch eine Reihenentwicklung für die Lösung der S
gleichung (36) zu erhalten, setzen wir

$$Q\left(z \middle| \begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} (z - z_0)^n. \tag{53}$$

Setzen wir diese Reihe in Gleichung (44) ein und wäh
$U_1(z|i, \varkappa)$ und $U_2(z|i, \varkappa)$ die für $z = z_0$ verschwindenden Lösur
beiden ersten Gleichungen von (35), die ja allen geforderte
gungen genügen, so ergeben sich für die Koeffizienten ψ die

$$\psi_0 \begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} = C \begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \psi_n \begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} = & \int_0^1 \left\{ C\begin{pmatrix}\lambda\\ \varkappa_2\end{pmatrix} \varphi_n(\lambda, \varkappa_1) + C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \lambda\end{pmatrix} \Phi_n(\lambda, \varkappa_2) \right\} d\lambda \\ & + \int_0^1 \int_0^1 C\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \Big\{ \varphi_1(\lambda, \varkappa_1) \Phi_{n-1}(\mu, \varkappa_2) + \cdots \\ & \qquad + \varphi_{n-1}(\lambda, \varkappa_1) \Phi_1(\mu, \varkappa_2 \end{aligned} \tag{55}$$

$n = 1, 2 \cdots$

wo die φ und Φ sich aus den beiden ersten der Formeln
stimmen. Auch die Reihe (53) konvergiert vermöge der Da
(44) für $|z - z_0| < R$, und die aus ihr durch analytische For
entspringende monogene analytische Funktion ist im ganze
morphiebereich der Koeffizientenfelder holomorph und eine
von (36).

Ist wieder $z = p$ ein isolierter singulärer Punkt, und bes
wir einen Weg, der diesen Punkt umschließt und zum Punkt
zurückkehrt, so verwandeln sich $U_1(z|i, \varkappa)$ und $U_2(z|i, \varkappa)$
$\overline{U}_1(z|i, \varkappa)$ und $\overline{U}_2(z|i, \varkappa)$, und $Q\left(z \middle| \begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right)$ folglich in

$$\begin{aligned} \overline{Q}\left(z \middle| \begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right) = C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} + & \int_0^1 \left\{ C\begin{pmatrix}\lambda\\ \varkappa_2\end{pmatrix} \overline{U}_1(z|\lambda, \varkappa_1) + C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \lambda\end{pmatrix} \overline{U}_2(z|\lambda, \varkappa_2 \right. \\ & + \int_0^1 \int_0^1 C\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \overline{U}_1(z|\lambda, \varkappa_1) \overline{U}_2(z|\mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu. \end{aligned}$$

Wollen wir $\overline{Q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right)$ durch $U_1(z|i,\varkappa)$ und $U_2(z|i,\varkappa)$ ausdrücken, so müssen wir berücksichtigen, daß nach Formel (37)

$$\overline{U}_1(z|i,\varkappa) = U_1(z|i,\varkappa) + c_1(i,\varkappa) + \int_0^1 c_1(i,\lambda)\, U_1(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda$$

$$\overline{U}_2(z|i,\varkappa) = U_2(z|i,\varkappa) + c_2(i,\varkappa) + \int_0^1 c_2(i,\lambda)\, U_2(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in unsere letzte Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\overline{Q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right) = C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} + \int_0^1 \Bigg\{ C\begin{pmatrix}\lambda\\ \varkappa_2\end{pmatrix}\Big[& U_1(z|\lambda,\varkappa_1) + c_1(\lambda,\varkappa_1) \\ & + \int_0^1 c_1(\lambda,\mu)\, U_1(z|\mu,\varkappa_1)\, d\mu\Big] \\ + C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \lambda\end{pmatrix}\Big[& U_2(z|\lambda,\varkappa_2) + c_2(\lambda,\varkappa_2) \\ & + \int_0^1 c_2(\lambda,\mu)\, U_2(z|\mu,\varkappa_2)\, d\mu\Big]\Bigg\} d \\ + \int_0^1\!\!\int_0^1 C\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\Big[& U_1(z|\lambda,\varkappa_1) + c_1(\lambda,\varkappa_1) + \int_0^1 c_1(\lambda,\nu)\, U_1(z|\nu,\varkappa_1)\, d \\ & \cdot\Big[U_2(z|\mu,\varkappa_2) + c_2(\mu,\varkappa_2) + \int_0^1 c_2(\mu,\pi)\, U_2(z|\pi,\varkappa_2)\, d\pi\Big]\, d\lambda\, d\end{aligned}$$

Setzen wir dann

$$\begin{aligned}(56)\qquad \overline{C}\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} &+ \int_0^1 \left\{ C\begin{pmatrix}\lambda\\ \varkappa_2\end{pmatrix} c_1(\lambda,\varkappa_1) + C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \lambda\end{pmatrix} c_2(\lambda,\varkappa_2)\right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1\!\!\int_0^1 C\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} c_1(\lambda,\varkappa_1)\, c_2(\mu,\varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu,\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}(57)\quad \overline{Q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right) = \overline{C}\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix} &+ \int_0^1 \left\{ \overline{C}\begin{pmatrix}\lambda\\ \varkappa_2\end{pmatrix} U_1(z|\lambda,\varkappa_1) + \overline{C}\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \lambda\end{pmatrix} U_2(z|\lambda,\varkappa_2)\right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1\!\!\int_0^1 \overline{C}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} U_1(z|\lambda,\varkappa_1)\, U_2(z|\mu,\varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu.\end{aligned}$$

$\overline{C}\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix}$ ist also der Anfangswert für $z = z_0$ nach dem Umlauf um den

14. Es seien jetzt die beiden Koeffizientenfelder Konstantenfelde $b_1(i, \varkappa)$ und $b_2(i, \varkappa)$. Das System (35) nimmt dann die Gestalt an

$$
(58)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dz} U_1(z|i, \varkappa) = b_1(i, \varkappa) + \int_0^1 U_1(z|i, \lambda) b_1(\lambda, \varkappa)\, d\lambda \\
&\frac{d}{dz} U_2(z|i, \varkappa) = b_2(i, \varkappa) + \int_0^1 U_2(z|i, \lambda) b_2(\lambda, \varkappa)\, d\lambda \\
&\frac{d}{dz} V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right) = U_1(z|i_1, \varkappa_1) b_2(i_2, \varkappa_2) - U_2(z|i_1, \varkappa_2) b_1(i_2, \varkappa_1) \\
&\qquad - U_1(z|i_2, \varkappa_1) b_2(i_1, \varkappa_2) + U_2(z|i_2, \varkappa_2) b_1(i_1, \varkappa_1) \\
&\qquad + \int_0^1 \left\{ V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2\end{matrix}\right.\right) b_1(\lambda, \varkappa_1) + V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda\end{matrix}\right.\right) b_2(\lambda, \varkappa_2) \right\} d
\end{aligned}
\right.
$$

Die für $z = z_0$ verschwindenden Lösungen der beiden ersten diese Gleichungen sind, wie sich aus den beiden ersten Formeln von (51 sofort ergibt, die sogenannten Volterraschen Transzendenten[1])

$$
(59)\quad \left\{
\begin{aligned}
W(z - z_0 \mid b_1(i, \varkappa)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_1^{(n)}(i, \varkappa)(z - z_0)^n \\
W(z - z_0 \mid b_2(i, \varkappa)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_2^{(n)}(i, \varkappa)(z - z_0)^n,
\end{aligned}
\right.
$$

wo

$$
(60)\quad \left\{
\begin{aligned}
b_1^{(n)}(i, \varkappa) &= \int_0^1 b_1^{(n-1)}(i, \lambda) b_1(\lambda, \varkappa)\, d\lambda \\
b_2^{(n)}(i, \varkappa) &= \int_0^1 b_2^{(n-1)}(i, \lambda) b_2(\lambda, \varkappa)\, d\lambda
\end{aligned}
\right.
$$

die sogenannten iterierten Kerne sind.[2])

Die für $z = z_0$ verschwindende Lösung der dritten Gleichung vo (58), die mit $W(z - z_0 \mid b_1(i, \varkappa))$ und $W(z - z_0 \mid b_2(i, \varkappa))$ ein Lösungs system bildet, ist sonach

---

1) Vgl. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes, Paris 1913, S. 198 Schlesinger, a. a. O., S. 113.

2) Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., S. 514.

$$V\left(z\left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right.\right) = \left|\begin{matrix} W(z-z_0 \mid b_1(i_1, \varkappa_1)) \, W(z-z_0 \mid b_2(i_1, \varkappa_2)) \\ W(z-z_0 \mid b_1(i_2, \varkappa_1)) \, W(z-z_0 \mid b_2(i_2, \varkappa_2)) \end{matrix}\right|$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n \begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} (z-z_0)^n,$$

ch (51) und (59)

$$\chi_n \begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} = \Big[\frac{1}{1!} b_1(i_1, \varkappa_1) \frac{1}{(n-1)!} b_2^{(n-1)}(i_2, \varkappa_2) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} b_1^{(n-1)}(i_1, \varkappa_1) \frac{1}{1!} b_2(i_2, \varkappa_2)\Big]$$
$$- \Big[\frac{1}{1!} b_1(i_2, \varkappa_1) \frac{1}{(n-1)!} b_2^{(n-1)}(i_1, \varkappa_2) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} b_1^{(n-1)}(i_2, \varkappa_1) \frac{1}{1!} b_2(i_1, \varkappa_2)\Big]$$

$$\chi_n \begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n!}\Big\{\Big[\binom{n}{1} b_1(i_1, \varkappa_1) b_2^{(n-1)}(i_2, \varkappa_2) + \cdots + \binom{n}{n-1} b_1^{(n-1)}(i_1, \varkappa_1) b_2(i_2, \varkappa_2)\Big]$$
$$- \Big[\binom{n}{1} b_1(i_2, \varkappa_1) b_2^{(n-1)}(i_1, \varkappa_2) + \cdots + \binom{n}{n-1} b_1^{(n-1)}(i_2, \varkappa_1) b_2(i_1, \varkappa_2)\Big]\Big\}.$$

lgemeine Lösungssystem wird nach (43) dargestellt durch die n

$$\mathfrak{U}_1(z \mid i, \varkappa) = W(z-z_0 \mid b_1(i, \varkappa)) + c_1(i, \varkappa) + \int_0^1 c_1(i, \lambda) W(z-z_0 \mid b_1(\lambda, \varkappa)) \, d\lambda$$

$$\mathfrak{U}_2(z \mid i, \varkappa) = W(z-z_0 \mid b_2(i, \varkappa)) + c_2(i, \varkappa) + \int_0^1 c_2(i, \lambda) W(z-z_0 \mid b_2(\lambda, \varkappa)) \, d\lambda$$

$$\mathfrak{V}\left(z \left|\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right.\right) = \left|\begin{matrix} \mathfrak{U}_1(z \mid i_1, \varkappa_1) \; \mathfrak{U}_2(z \mid i_1, \varkappa_2) \\ \mathfrak{U}_1(z \mid i_2, \varkappa_1) \; \mathfrak{U}_2(z \mid i_2, \varkappa_2) \end{matrix}\right|$$
$$+ \int_0^1 \Big\{ \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} W(z-z_0 \mid b_1(\lambda, \varkappa_1)) + \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} W(z-z_0 \mid b_2(\lambda, \varkappa_2)) \Big\} d\lambda$$
$$+ \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} W(z-z_0 \mid b_1(\lambda, \varkappa_1)) \, W(z-z_0 \mid b_2(\mu, \varkappa_2)) \, d\lambda \, d\mu.$$

Die Streckengleichung (36) erhält die Gestalt

$$(64)\qquad \frac{d}{dz}Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right)=\int_0^1\left\{Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\lambda\\ \varkappa_2\end{matrix}\right)b_1(\lambda,\varkappa_1)+Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\varkappa_1\\ \lambda\end{matrix}\right)b_2(\lambda,\varkappa_2)\right\}d\lambda,$$

und ihre allgemeine Lösung hat nach (44) die Form

$$\begin{aligned}(65)\qquad Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right)=C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{pmatrix}&+\int_0^1\left\{C\begin{pmatrix}\lambda\\ \varkappa_2\end{pmatrix}W(z-z_0\mid b_1(\lambda,\varkappa_1))\right.\\ &\qquad\left.+\,C\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \lambda\end{pmatrix}W(z-z_0\mid b_2(\lambda,\varkappa_2))\right\}d\lambda\\ &+\int_0^1\int_0^1 C\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}W(z-z_0\mid b_1(\lambda,\varkappa_1))\,W(z-z_0\mid b_2(\mu,\varkappa_2))\,d\lambda\, d\mu\end{aligned}$$

15. Setzen wir in (35)

$$b_1(z|i,\varkappa)=b_2(z|i,\varkappa)=b(z|i,\varkappa),$$

so kommen wir zu dem System

$$(25)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dz}U(z|i,\varkappa)&=b(z|i,\varkappa)+\int_0^1 U(z|i,\lambda)b(z|\lambda,\varkappa)\,d\lambda\\ \frac{d}{dz}V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\varkappa_2\end{matrix}\right)&=U(z|i_1,\varkappa_1)b(z|i_2,\varkappa_2)-U(z|i_1,\varkappa_2)b(z|i_2,\varkappa_1)\\ &\quad-U(z|i_2,\varkappa_1)b(z|i_1,\varkappa_2)+U(z|i_2,\varkappa_2)b(z|i_1,\varkappa_1)\\ &\quad+\int_0^1\left\{V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\lambda\\ \varkappa_1,\varkappa_2\end{matrix}\right)b(z|\lambda,\varkappa_1)\right.\\ &\qquad\qquad\left.+\,V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\varkappa_1\\ i_2,\lambda\end{matrix}\right)b(z|\lambda,\varkappa_2)\right\}d\lambda\end{aligned}\right.$$

zurück, dem die Ausdrücke

$$\frac{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i\\ \varkappa\end{matrix}\right)}{D_y(z)}\quad\text{und}\quad\frac{D_y\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}i_1,\,i_2\\ \varkappa_1,\varkappa_2\end{matrix}\right)}{D_y(z)}$$

genügen, wenn $y(z|i,\varkappa)$ eine Lösung der Integrodifferentialgleichung (17) ist.

Das allgemeine Lösungssystem ergibt sich aus (38) und (43) für

$$U_1(z|i,\varkappa)=U_2(z|i,\varkappa)=U(z|i,\varkappa)$$

und

$$c_1(i,\varkappa)=c_2(i,\varkappa)=c(i,\varkappa)$$

in den beiden Formen

$$\begin{cases} \mathfrak{U}(z|i,\varkappa) = U(z|i,\varkappa) + c(i,\varkappa) + \int\limits_0^1 c(i,\lambda)\, U(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda \\ \mathfrak{V}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) + C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} + c(i_1,\varkappa_1)\, U(z|i_2,\varkappa_2) \\ \qquad - c(i_1,\varkappa_2)\, U(z|i_2,\varkappa_1) - c(i_2,\varkappa_1)\, U(z|i_1,\varkappa_2) \\ \qquad + c(i_2,\varkappa_2)\, U(z|i_1,\varkappa_1) \\ \qquad + \int\limits_0^1 \Big\{ C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} U(z|\lambda,\varkappa_1) + C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} U(z|\lambda,\varkappa_2) \\ \qquad\qquad + c(i_1,\lambda)[U(z|\lambda,\varkappa_1)\, U(z|i_2,\varkappa_2) \\ \qquad\qquad\qquad - U(z|i_2,\varkappa_1)\, U(z|\lambda,\varkappa_2)] \\ \qquad\qquad + c(i_2,\lambda)[U(z|i_1,\varkappa_1)\, U(z|\lambda,\varkappa_2) \\ \qquad\qquad\qquad - U(z|\lambda,\varkappa_1)\, U(z|i_1,\varkappa_2)] \Big\} d\lambda \\ \qquad + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} U(z|\lambda,\varkappa_1)\, U(z|\mu,\varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{U}(z|i,\varkappa) = U(z|i,\varkappa) + c(i,\varkappa) + \int\limits_0^1 c(i,\lambda)\, U(z|\lambda,\varkappa)\, d\lambda \\ \mathfrak{V}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \mathfrak{U}(z|i_1,\varkappa_1) & \mathfrak{U}(z|i_1,\varkappa_2) \\ \mathfrak{U}(z|i_2,\varkappa_1) & \mathfrak{U}(z|i_2,\varkappa_2) \end{vmatrix} + \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} \\ \qquad + \int\limits_0^1 \Big\{ \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} U(z|\lambda,\varkappa_1) + \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} U(z|\lambda,\varkappa_2) \Big\} d\lambda \\ \qquad + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} U(z|\lambda,\varkappa_1)\, U(z|\mu,\varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu. \end{cases}$$

Form (66) des allgemeinen Lösungssystems von (25) läßt sich etwas vereinfachen. Da nämlich durch (67) jedes Lösungssystem estellt wird, so läßt sich auch insbesondere das in (66) auftretende ungssystem

$$U(z|i,\varkappa),\quad V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right)$$

iß den Formeln (67) durch $U(z|i,\varkappa)$ allein ausdrücken. Es wird

$$c(i,\varkappa) = 0$$

$$V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = \left| \begin{matrix} U(z|i_1, \varkappa_1) & U(z|i_1, \varkappa_2) \\ U(z|i_2, \varkappa_1) & U(z|i_2, \varkappa_2) \end{matrix} \right| + \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} U(z|\lambda, \varkappa_1) + \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} U(z|\lambda, \right.$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} U(z|\lambda, \varkappa_1)\, U(z|\mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu.$$

Daraus folgt

$$U(z|i_1, \varkappa_1)\, U(z|i_2, \varkappa_2) - U(z|i_2, \varkappa_1)\, U(z|i_1, \varkappa_2) = V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) - \mathfrak{C}\Big($$

$$- \int_0^1 \left\{ \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} U(z|\lambda, \varkappa_1) + \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} U(z|\lambda, \varkappa \right.$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} U(z|\lambda, \varkappa_1)\, U(z|\mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu.$$

Setzen wir diesen Wert für die Determinante in die letzte Gl
von (66) ein, so erhalten wir nach geeigneter Anordnung

$$\mathfrak{V}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) + \Bigg[C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} - \int_0^1 \Bigg\{ c(i_1, \lambda)\, \mathfrak{C}\begin{pmatrix} \lambda, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix}$$

$$+ c(i_2, \lambda)\, \mathfrak{C}\Big(\begin{matrix} i_1, \varkappa \\ \lambda, \varkappa \end{matrix}$$

$$+ c(i_1, \varkappa_1)\, U(z|i_2, \varkappa_2) - c(i_1, \varkappa_2)\, U(z|i_2, \varkappa_1)$$
$$- c(i_2, \varkappa_1)\, U(z|i_1, \varkappa_2) + c(i_2, \varkappa_2)\, U(z|i_1, \varkappa_1)$$

$$+ \int_0^1 \Bigg\{ \Bigg[C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix} - \int_0^1 \Bigg(c(i_1, \mu)\, \mathfrak{C}\begin{pmatrix} \mu, \lambda \\ i_2, \varkappa_2 \end{pmatrix}$$

$$+ c(i_2, \mu)\, \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ \mu, \varkappa_2 \end{pmatrix} \Bigg) d\mu \Bigg] U(z|\lambda,$$

$$+ \Bigg[C\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix} - \int_0^1 \Bigg(c(i_1, \mu)\, \mathfrak{C}\begin{pmatrix} \mu, \varkappa_1 \\ i_2, \lambda \end{pmatrix}$$

$$+ c(i_2, \mu)\, \mathfrak{C}\begin{pmatrix} i_1, \varkappa_1 \\ \mu, \lambda \end{pmatrix} \Bigg) d\mu \Bigg] U($$

$$+ c(i_1, \lambda)\, V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \lambda, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) + c(i_2, \lambda)\, V\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \lambda, \varkappa_2 \end{matrix}\right) \Bigg\} d\lambda$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \Bigg[C\begin{pmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} - \int_0^1 \Bigg\{ c(i_1, \nu)\, \mathfrak{C}\begin{pmatrix} \nu, \lambda \\ i_2, \mu \end{pmatrix} + c(i_2, \nu)\, \mathfrak{C}\Big(\begin{matrix} i_1, \lambda \\ \nu, \mu \end{matrix}$$

$$\cdot\, U(z|\lambda, \varkappa_1)\, U(z|\mu, \varkappa_2)$$

Setzen wir also

$$(68)\quad C\binom{i_1, \varkappa_1}{i_2, \varkappa_2} - \int_0^1 \left\{ c(i_1, \lambda)\, \mathfrak{C}\binom{\lambda, \varkappa_1}{i_2, \varkappa_2} + c(i_2, \lambda)\, \mathfrak{C}\binom{i_1, \varkappa_1}{\lambda, \varkappa_2} \right\} d\lambda = C_1\binom{i_1, \varkappa_1}{i_2, \varkappa_2},$$

wo $C_1\binom{i_1, \varkappa_1}{i_2, \varkappa_2}$ dann auch wieder ein willkürliches Konstantenfeld ist, so erscheint das allgemeine Lösungssystem von (25) in der Form[1])

$$(69)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}(z\,|\,i, \varkappa) = U(z\,|\,i, \varkappa) + c(i, \varkappa) + \int_0^1 c(i, \lambda)\, U(z\,|\,\lambda, \varkappa)\, d\lambda \\ \mathfrak{B}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) = V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) + C_1\binom{i_1, \varkappa_1}{i_2, \varkappa_2} + c(i_1, \varkappa_1)\, U(z\,|\,i_2, \varkappa_2) \\ \qquad - c(i_1, \varkappa_2)\, U(z\,|\,i_2, \varkappa_1) - c(i_2, \varkappa_1)\, U(z\,|\,i_1, \varkappa_2) \\ \qquad + c(i_2, \varkappa_2)\, U(z\,|\,i_1, \varkappa_1) \\ \qquad + \int_0^1 \Big\{ C_1\binom{i_1, \lambda}{i_2, \varkappa_2} U(z\,|\,\lambda, \varkappa_1) + C_1\binom{i_1, \varkappa_1}{i_2, \lambda} U(z\,|\,\lambda, \varkappa_2) \\ \qquad\qquad + c(i_1, \lambda)\, V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda, \varkappa_1 \\ i_2, \varkappa_2 \end{matrix}\right) + c(i_2, \lambda)\, V\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} i_1, \varkappa_1 \\ \lambda, \varkappa_2 \end{matrix}\right) \Big\} d\lambda \\ \qquad + \int_0^1 \int_0^1 C_1\binom{i_1, \lambda}{i_2, \mu}\, U(z\,|\,\lambda, \varkappa_1)\, U(z\,|\,\mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu. \end{cases}$$

Diese Form entspricht der Darstellung der Minoren eines komponierten Feldes durch die Minoren seiner Komponenten in der Gestalt (16).

Die allgemeine Lösung der Streckengleichung

$$(32)\quad \frac{d}{dz} Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right) = \int_0^1 \left\{ Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \lambda \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right) b(z\,|\,\lambda, \varkappa_1) + Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \lambda \end{matrix}\right) b(z\,|\,\lambda, \varkappa_2) \right\} d\lambda,$$

die der zweiten Gleichung von (25) entspricht, hat nach Formel (44) die Form

$$(70)\quad Q\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{matrix}\right) = C\binom{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \int_0^1 \left\{ C\binom{\lambda}{\varkappa_2} U(z\,|\,\lambda, \varkappa_1) + C\binom{\varkappa_1}{\lambda} U(z\,|\,\lambda, \varkappa_2) \right\} d\lambda$$
$$+ \int_0^1 \int_0^1 C\binom{\lambda}{\mu}\, U(z\,|\,\lambda, \varkappa_1)\, U(z\,|\,\mu, \varkappa_2)\, d\lambda\, d\mu,$$

1) Den in Nr. 7 erwähnten Bedingungen für die Fredholmschen Determinanten von $U_1(z\,|\,i, \varkappa)$ und $U_2(z\,|\,i, \varkappa)$ entsprechend muß hier überall das Nichtverschwinden der Determinante von $U(z\,|\,i, \varkappa)$ und der Determinante von

wo $U(z|i, \varkappa)$ eine den bekannten Bedingungen genügende Lö
ersten Gleichung von (25) ist.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, am Schlusse meiner
rungen Herrn Professor Dr. L. Schlesinger für die Anreg
dieser Arbeit sowie für die Unterstützung, die er mir b
Abfassung hat zuteil werden lassen, meinen besten Dank
sprechen.

LEBENSLAUF.

Ich, Artur Saßmannshausen, bin geboren am 5. März 1894 zu Worms als Sohn des Großh. Hauptsteueramtskontrolleurs Christian Saßmannshausen und bin evangelischer Konfession. Vom 6. bis zum 9. Lebensjahre wurde ich privat unterrichtet, mit Ausnahme der Zeit von Ostern bis Herbst 1901, in der ich die zweite Klasse der Vorschule zu Worms besuchte. Ostern 1903 trat ich in die Sexta des Großh. Gymnasiums zu Worms ein, dem ich bis zur Ablegung der Reifeprüfung am 7 März 1912 angehörte. Im Sommer-Semester 1912 wurde ich an der Universität Gießen immatrikuliert, an der ich mich bis jetzt dem Studium der Mathematik und Physik gewidmet habe. In dieser Zeit nahm ich an Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten teil: Cermak, Engel, Fromme, Graßmann, Jentzsch, König, Messer, Noack, Schlesinger, Sieboek. Allen diesen Herren bin ich zu großem Danke verpflichtet.